Lösungen zu den tet.folio-Aufgaben „Zweidimensionale Stöße und Impulserhaltung“

Die nachfolgenden Lösungen richten sich in erster Linie an Lehrkräfte. Es sind daher nicht in allen Fällen ausführliche Lösungen angegeben.

Motivation

- **Zweidimensionale Stöße**

Antwortbox 1: Stoßprozesse aus dem eigenen Erfahrungsbereich

Zusammenstöße im Straßenverkehr

Kollisionen beim Sport

Billard

…

Kennenlernen des Luftkissentisches

- **Einführung und Kennenlernen des Luftkissentisches**

Antwortbox 1:

Direkte Ausführung der Anweisungen auf dem Luftkissentisch

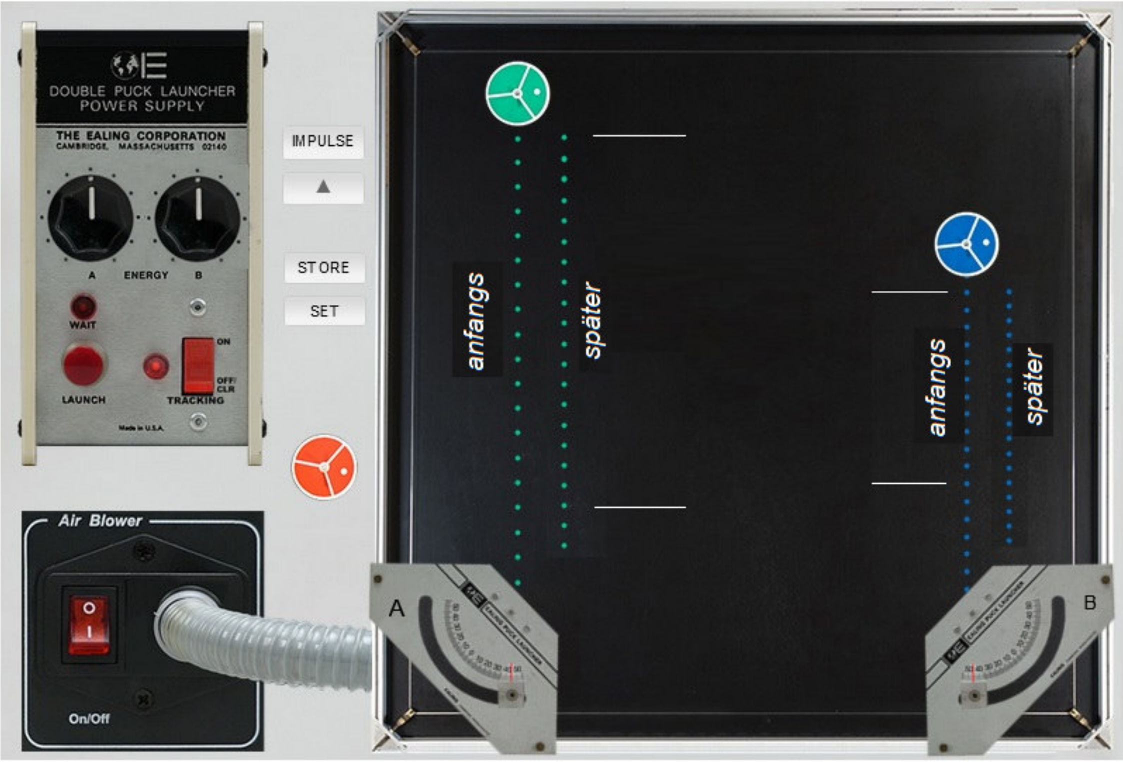
Antwortbox 2: Geschwindigkeitsabnahme

Man erkennt die Geschwindigkeitsabnahme an den enger werdenden Markierungspunkten: Je kleiner deren Abstand umso kleiner die Geschwindigkeit.

Wegen der immer noch vorhandenen Reibung kommt es im Laufe der Bewegung zu einer Geschwindigkeitsabnahme.

Nachweis durch die Messung zweier Geschwindigkeiten zu Anfang der Bewegung und nach längerer Zeit.

Antwortbox 3: Geschwindigkeitsabnahme des blauen Punks



Die Grafik stellt die gesetzten Markierungen unmittelbar nach dem Start (jeweils linke grüne und blaue gestrichelte Linie) und zu einem späteren Zeitpunkt dar.

Grüner Puck: auf anfangs 15 Zeitintervalle kommen zum späteren Zeitpunkt 18.

Blauer Puck: auf anfangs 11 Zeitintervalle kommen zum späteren Zeitpunkt 13.

Da die Quotienten 18/15 und 13/11 nahezu gleich sind, kann man sagen, dass der relative Geschwindigkeitsverlust für den grünen und den blauen Puck, letzterer mit doppelter Masse, ungefähr gleich ist.

- **Exkurs: Die Startenergie der Pucks**

Antwortbox 1: Initialgeschwindigkeit beider Launcher

Die ist in guter Übereinstimmung gegeben.

Antwortbox 2: Geschwindigkeitsverhältnis der Pucks (grün/blau)

Eine Messung ergibt, dass $\frac{v_{0\,grün}}{v_{o\,blau}} \approx 1{,}4$ *ist.*

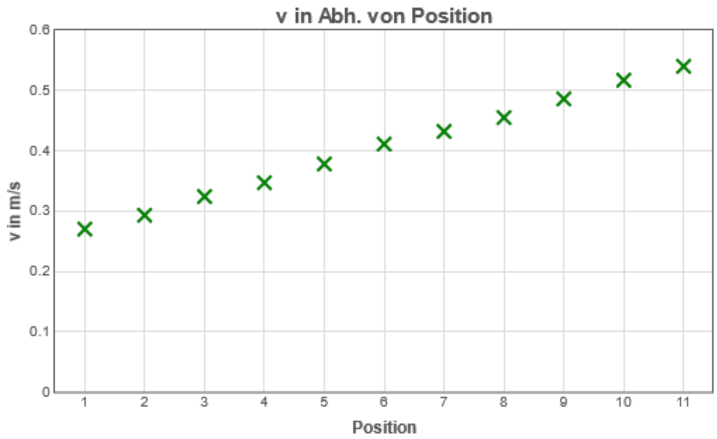
Antwortbox 3: Massenverhältnis der Pucks

Es gilt bei derselben Einstellung eines Launchers: $E_{grün} = E_{blau}$ *und wegen* $E = \frac{1}{2}mv^2$ *somit*

Antwortbox 4: Geschwindigkeit des grünen Pucks bei allen Launcher-Einstellungen

Bildschirmfoto:

	Pos	v in m/s
1	1	0.270
2	2	0.293
3	3	0.324
4	4	0.347
5	5	0.378
6	6	0.411
7	7	0.432
8	8	0.455
9	9	0.486
10	10	0.517
11	11	0.540
12		



Tabellenwerte:

1 0.270
2 0.293
3 0.324
4 0.347
5 0.378
6 0.411
7 0.432
8 0.455
9 0.486
10 0.517
11 0.540

Antwortbox 5: Zusammenhang zwischen Position und Initialgeschwindigkeit

Es handelt sich um einen linearen Zusammenhang, wobei
→ zwischen erster und letzter Position der Faktor 2 in der Geschwindigkeit festzustellen ist und
→ in der ersten Position bereits eine deutlich von null verschiedene Anfangsgeschwindigkeit erreicht wird.

Antwortbox 6: Verhältnis der Startenergien

Da in der Endeinstellung die doppelte Geschwindigkeit wie in der Anfangseinstellung ist die dem Puck vermittelte kinetische Energie wegen $E = \frac{1}{2}mv^2$ *viermal so groß, also* $\frac{E_{11}}{E_1} = 4.$

Antwortbox 7: Verhältnis der Spannungen

Da $\frac{1}{2}mv^2 = E_{mech} = E_{elektr} = \frac{1}{2}CU^2$, *ist* $\frac{E_{elektr\ 11}}{E_{elektr\ 1}} = 4$ *und damit das Spannungsverhältnis* $\frac{U_{elektr\ 11}}{U_{elektr\ 1}} = 2$.

Impulserhaltungssatz

- **Bestätigung des Impulserhaltungssatzes**

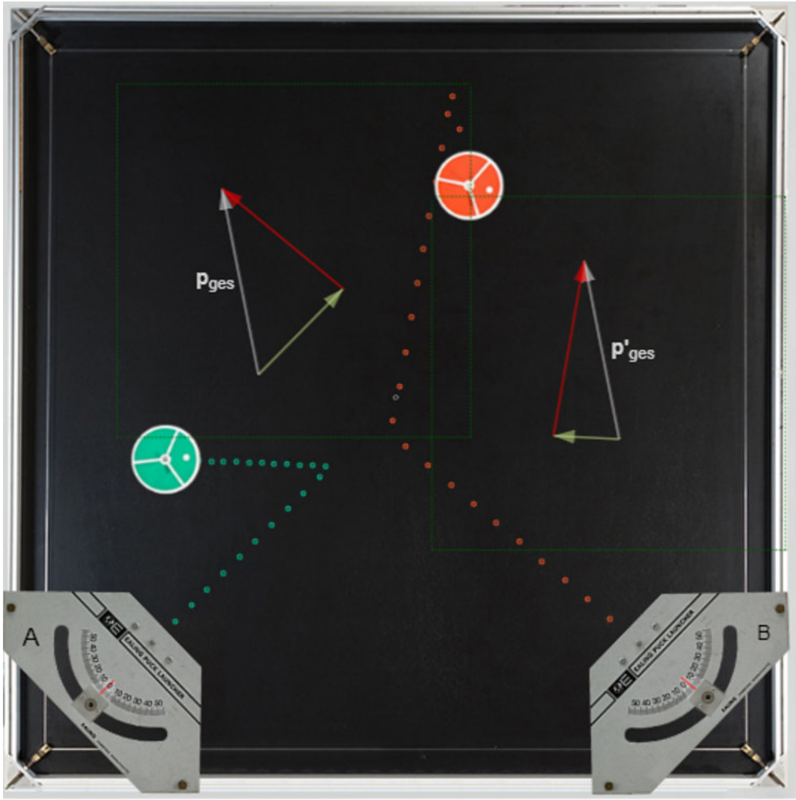
Antwortbox 1: Verfahren

Bahnpunkte als Maß für Impuls:
Es ist $p = m \cdot v$, *also* $p{\sim}v$. *Da es sich bei der Bewegung der Pucks um eine nahezu gleichförmige Bewegung handelt, ist* $v{\sim}s$, *insgesamt also* $p{\sim}s$.

Die Impulssumme vor und nach dem Stoß erhält man durch vektorielle Addition der beiden Einzelimpulse.

Antwortbox 2: Unterschiedliche Stoßkonstellationen

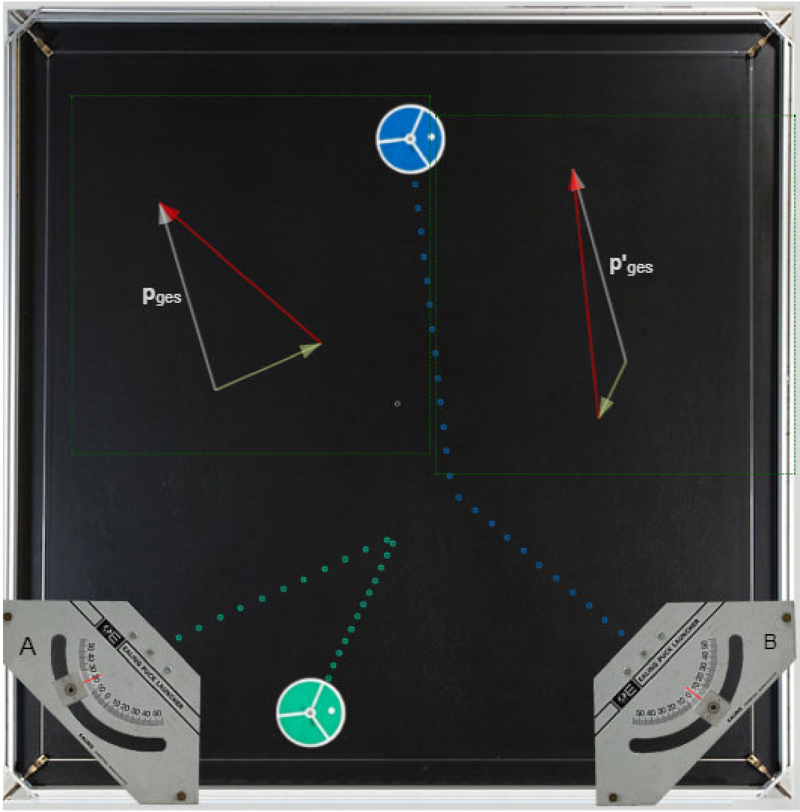
Beispielhaftes Bildschirmfoto:



$p_{ges} = p'_{ges}$

Antwortbox 3: Unterschiedliche Stoßkonstellationen (mit blauem Puck)

Beispielhaftes Bildschirmfoto:



$p_{ges} = p'_{ges}$

Achtung: Doppelte Masse des blauen Pucks durch doppelte Anzahl der Markierungen berücksichtigen.

- **Exkurs: Erlaubte Impulskonstellationen nach dem Stoß**

Antwortbox 1: Gesamtimpuls

Der Gesamtimpuls vor dem Stoß ergibt sich als vektorielle Summe der beiden Impulse vor dem Stoß – unabhängig davon, wie man die vektorielle Addition konkret geometrisch ausführt.

Antwortbox 2: p'_2

p'_2 muss sich bei jedem Winkel α so einstellen, dass die vektorielle Summe nach dem Stoß genauso groß ist wie diejenige vor dem Stoß.

Antwortbox 3: Unmöglichkeit beliebiger Impulse

Da zu einem größeren Impuls auch eine größere kinetische Energie gehört, würde bei großem p'_1 und damit auch wegen des Impulserhaltungssatzes erforderlich großem p'_2 die gesamte kinetische Energie nicht konstant bleiben können, sondern viel zu groß werden.

Antwortbox 4: Gleichung

Die Gleichung muss aufgrund des Energieerhaltungssatzes in dieser Form gelten, da $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$.

Als Konsequenz für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß ergibt sich wegen der konstanten Summe der Quadrate, dass geometrisch die beiden Geschwindigkeiten nach dem Stoß in der geometrischen Darstellung gemäß Thalessatz bzw. Satz des Pythagoras ein rechtwinkliges Dreieck ergeben müssen.

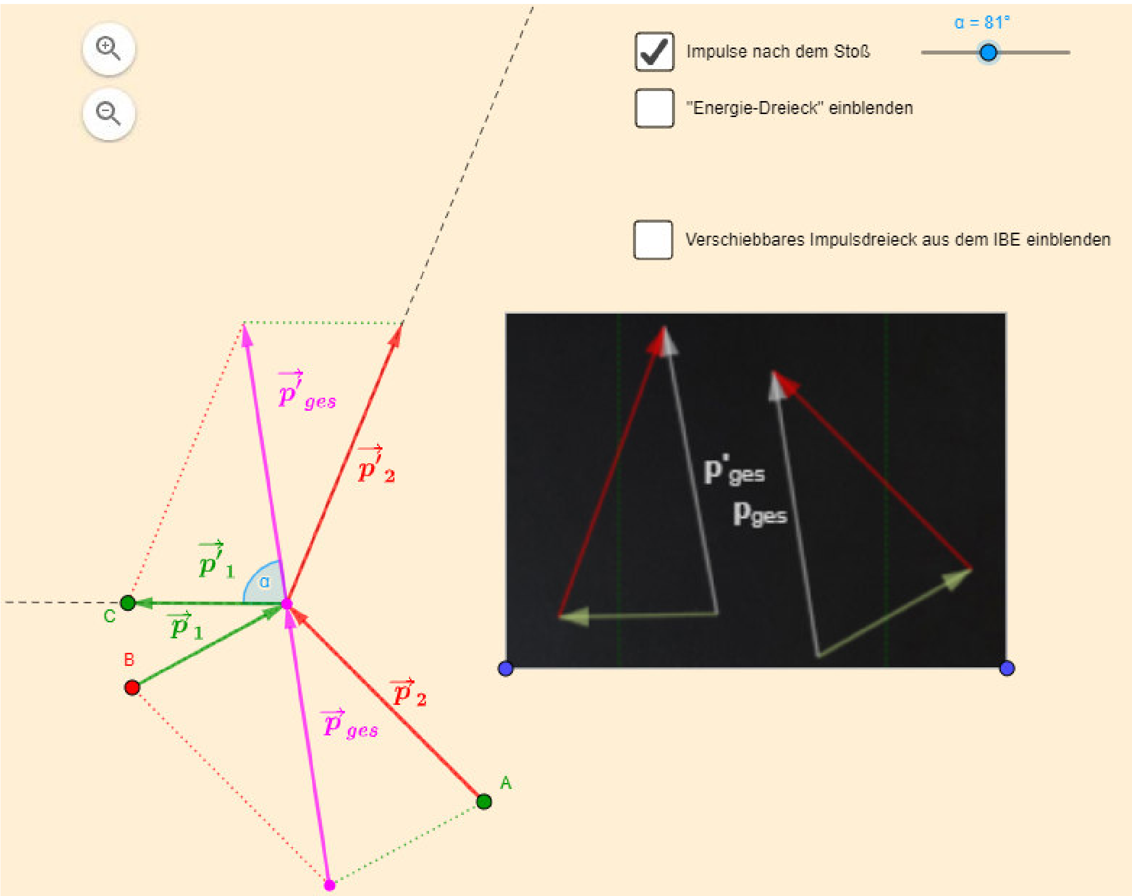
Antwortbox 5: Verschwinden des Dreiecks

Sobald eine der beiden Geschwindigkeiten nach dem Stoß größer als die Hypotenuse in dem „Energie"-Dreieck würde, kann sich kein Dreieck mehr ergeben.

Antwortbox 6: Begründung

Wenn orangefarbener und roter Pfeil übereinstimmen, ist sowohl die Verträglichkeit hinsichtlich des Impulserhaltungssatzes gewährleistet (Vektorsumme ist passend) als auch diejenige hinsichtlich des Energieerhaltungssatzes (Energiedreieck ist realisierbar).

Antwortbox 7: Vergleich Experiment und Modell



Antwortbox 8: Bewegungsrichtung

Man kann anhand der Abstände der Markierungspunkte erkennen, dass die beiden Kombinationen der „diagonalen" Aufeinandertreffen nicht möglich sind, da hier die anfänglichen und nachfolgenden kinetischen Energien in ihrer Summe nicht übereinstimmen können.

Wenn ein „vertikales" Aufeinandertreffen realisierbar ist, dann auch das entgegen gesetzte, da es sich lediglich um zeitlich umgekehrt ablaufende Ereignisse handelt. Bemerkung: Die technische Realisation wurde mit dem IBE in der von unten nach oben verlaufenden Bewegung durchgeführt.

- **Stoße eines Pucks an die Bande**

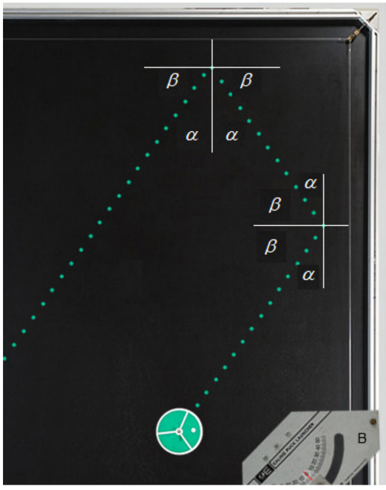
Antwortbox 1: Einfalls- und Reflexionswinkel

Einfalls- und Reflexionswinkel sind immer gleich groß.

Nach zweimaliger Reflexion kehrt der Puck in die genau entgegengesetzte Richtung zurück.

Antwortbox 2: Bewegung in die Gegenrichtung

Der Ergänzungswinkel α zum Einfallswinkel ist β=90°-α. Er ist auch der Einfallswinkel an der nachfolgenden Bande:



Daher ergibt sich eine gesamte Richtungsumkehr um 180°.

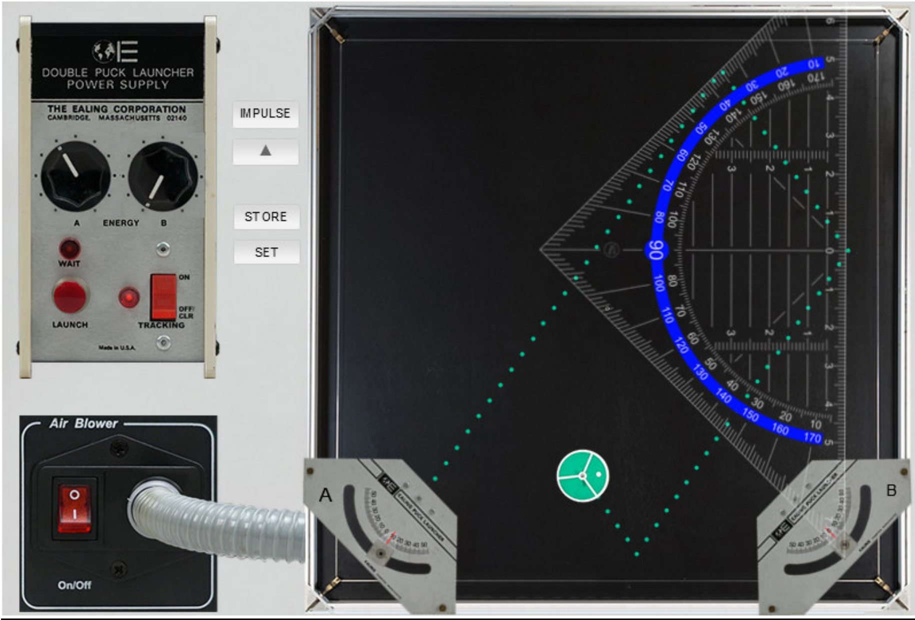
Antwortbox 3: Vergleich der Geschwindigkeiten in Betrag und Richtung

Die Richtung der Geschwindigkeit ändert sich entsprechend den voranstehenden Aussagen. Der Betrag bleibt (nahezu) gleich, da die Markierungspunkte vor und nach dem Stoß an die Banden (nahezu) denselben Abstand haben.

- **Exkurs: Impulsübertrag eines Pucks bei Reflexion an der Bande**

Antwortbox 1: Impuls vor und nach Reflexion

Betrag ist auszumessen über die aufgezeichneten Markierungspunkte, die Winkel können direkt mit dem Geodreieck abgelesen werden.

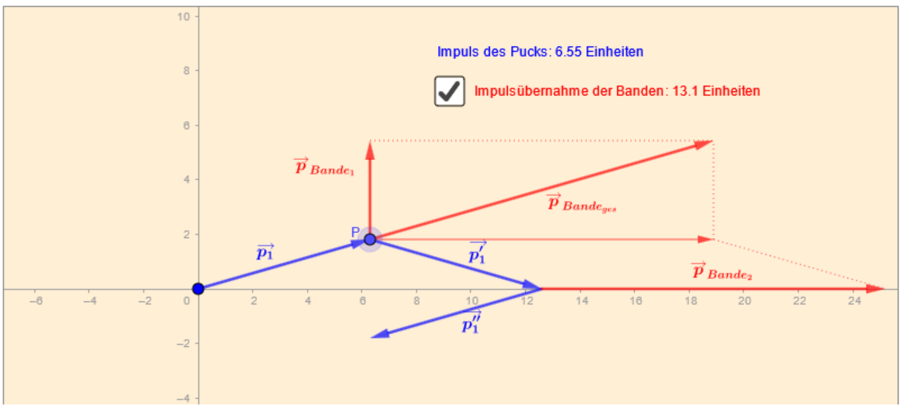


Antwortbox 2: Richtung des Differenzvektors

Denkt man sich den Impulsvektor in eine zur Bande parallele und eine zweite zur Bande orthogonale Komponente zerlegt, wird wegen des erkennbaren „Reflexionsgesetzes" immer genau eine der beiden Komponenten in die Gegenrichtung verändert. Daher ist aus geometrischen Gründen der Differenzvektor senkrecht zur jeweiligen Bande.

Antwortbox 3:

Beispielhaftes Bildschirmfoto:



Antwortbox 4: Impulsüberträge

Siehe Erklärung zu Antwortbox 2.

Antwortbox 5: Doppelter Impuls

Der Impuls des Pucks kehrt sich nach zweimaligem Stoß an beide aufeinanderfolgenden Banden genau um und bleibt dabei betragsmäßig gleich groß. Daher ist der Differenzvektor immer genau in Richtung des Anfangsimpulses und betragsmäßig doppelt so groß wie dieser.

Antwortbox 6: Reibungsfrei gelagerter Luftkissentisch

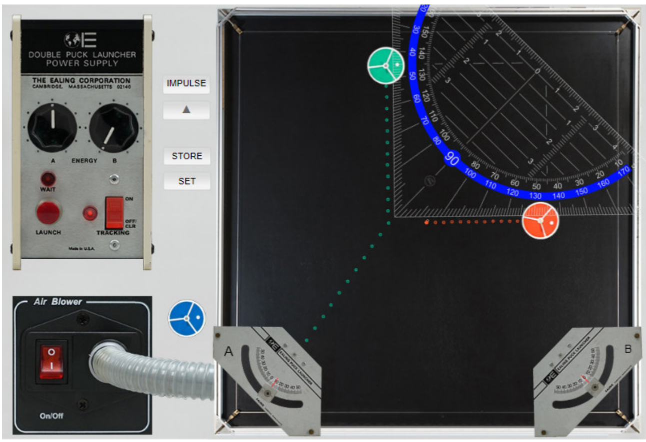
Ein reibungsfrei gelagerter Luftkissentisch würde sich aufgrund des von ihm gemäß Impulserhaltungssatz übernommenen Impulses in die Gegenrichtung (wegen seiner i. d. R. viel größeren Masse) langsam fortbewegen.

- **Stoß eines Pucks auf einen ruhenden Puck**

Antwortbox 1: Winkel zwischen den Pucks nach dem Stoß

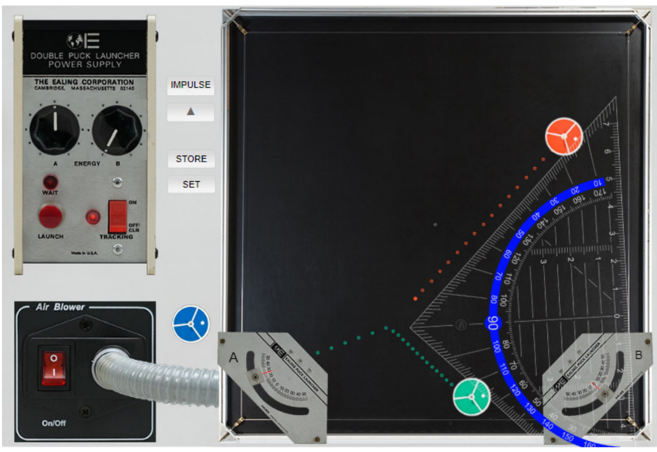
Man stellt fest, dass sich mit guter Genauigkeit genau immer ein rechter Winkel zwischen den beiden Pucks nach dem Stoß ergibt.

Bildschirmfoto als ein Beispiel:



Antwortbox 2: Winkel zwischen den Pucks nach dem Stoß (roter Puck beliebig)

Bildschirmfoto als ein Beispiel:



Antwortbox 3: Theoretische Begründung

Bei einem elastischen Stoß gelten der Impulserhaltungssatz und der Energieerhaltungssatz für die kinetischen Energien. Bei gleich großen stoßenden Massen ergibt aus beiden Erhaltungssätzen:

$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1'} + \overrightarrow{v_2'}$ *und* $v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2$. *Daher müssen die beiden Impulse nach dem Stoß in der vektoriellen Summe übereinstimmen mit dem einzigen Impuls vor dem Stoß und die es müssen die Quadrate der Geschwindigkeiten nach dem Stoß gleich dem Quadrat der einzigen Geschwindigkeit vor dem Stoß sein. Letztere Gleichung gilt aber exakt genau dann, wenn die insgesamt drei Vektoren ein rechtwinkliges Dreieck bilden (Thalessatz, Sat des Pythagoras).*

Antwortbox 4: Schiefer Stoß zweier Billardkugeln

Nachmessen bestätigt den rechten Winkel sowie die vektorielle Summe.

Antwortbox 5: Stoß auf Puck doppelter Masse

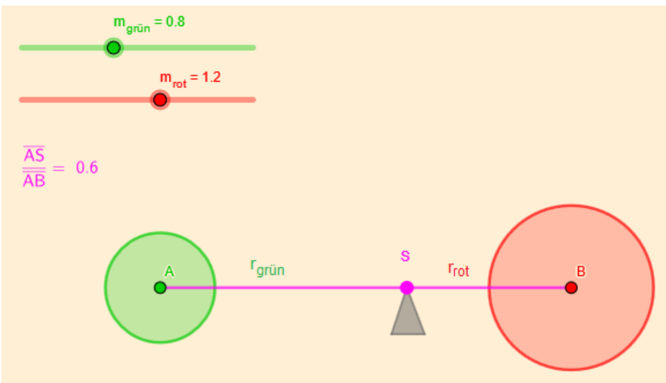
Es ergeben sich keine rechten Winkel mehr, wenn die Massen der beiden Pucks unterschiedlich voneinander sein.

- **Bewegung des Massenmittelpunkts beim Stoß auf einen ruhenden Puck**

Antwortbox 1: Messergebnis

Bestätigung erfolgt durch Ausmessen und Nachrechnen.

Antwortbox 2: Position des Massenschwerpunkts



Mit den Bezeichnungen aus der Skizze gilt für einen fest vorgegebenen Abstand $d = \overline{AB}$ *:*

$r_{grün} + r_{rot} = d$ *und* $m_{grün} \cdot r_{grün} = m_{rot} \cdot r_{rot}$.

Stellt man die beiden Gleichungen nach $r_{grün}$ *und* r_{rot} *um, ergibt sich:*

$$r_{grün} = \frac{m_{rot}}{m_{grün} + m_{rot}} \cdot d$$

und

$$r_{rot} = \frac{m_{grün}}{m_{grün} + m_{rot}} \cdot d$$

Antwortbox 3: Bewegung des Massenschwerpunkts beim Stoß auf einen ruhenden Körper

Die Strecke zwischen S und S‘ wird während ihrer Bewegung kontinuierlich durch dieselbe Anzahl Striche auf der gestrichelt eingezeichneten Linie dargestellt. Daher ist optisch gut zu erkennen, dass sich S und S‘ in der gleichen Weise fortbewegen.

- **Der Rückstoß**

Antwortbox 1: Erklärung der Unterschiede

Die Massen des gestoßenen Kollegen des Astronauten und des Basketballs unterscheiden sich erheblich ($\frac{m_{AstrKoll}}{m_{Basket}} \approx \frac{75kg}{567g} \approx 130$). Daher wird der Basketball sich bei einem sehr kleinen Impuls bereits wegbewegen, wobei der Astronaut fast in Ruhe bleibt, während der Kollege des Astronauten einen viel größeren Impuls benötigt, sodass der ihn stoßende Astronaut sich deutlich nach hinten bewegt.

Antwortbox 2: Erkennen des Rückstoßeffekts

Rudern: Man sieht das von den Ruderblättern wegbewegte Wasser.

Sprung aus Boot: Das Boot bewegt sich nach hinten (was manchmal dazu führt, dass die springende Person gar nicht bis zum Ufer gelangt)

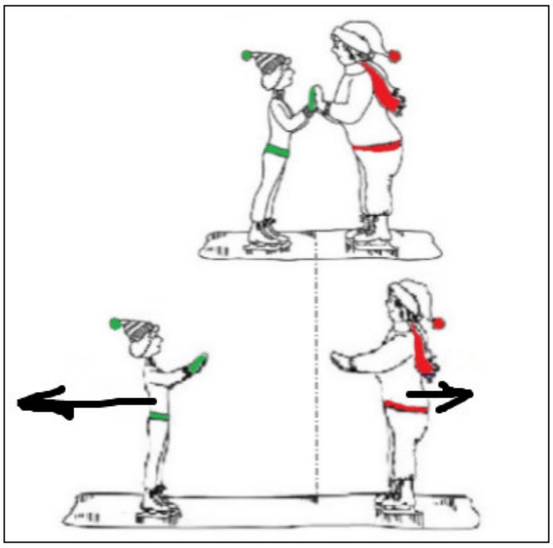
Gehen/Fahren: Eigentlich müsste man die sich mit der Straße verbundene Erde in die Gegenrichtung bewegen sehen, wegen deren enorm viel größerer Masse bleibt der Effekt minimal und kann nicht beobachtet werden.

Fliege der Vögel: Durch die Flügelschläge wird die Luft nach unten bewegt, sodass der Vogel sich daran „abstößt“ und nicht nach unten fällt.

Antwortbox 3: Rückstoß auf Eis

Die Masse der Mutter überwiegt diejenige der Tochter, sodass aufgrund der Gleichheit der durch das Wegstoßen erzeugten Impulse sich die Tochter schneller als die Mutter von dieser wegbewegt.

Bildschirmfoto:



Antwortbox 4: Interpretation der Darstellung

Vgl. Lösung zur voranstehenden Aufgabe.

Antwortbox 5: Zur Definition des Impulses

Nach der Definition des Impulses und nach dem Impulserhaltungssatz haben zwei sich genau aufeinander zu bewegende Objekte, die bei deren Kollision „aneinander haften" und dabei dann in Ruhe sind, haben vor dem Stoß betragsmäßig denselben, richtungsmäßig genau den entgegengerichteten Impuls.

Wenn keiner den anderen überwiegt, kann man über die „Gleichheit des Schwungs" den Impuls definieren über das Messergebnis $\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}$*, das sich für einen Stillstand nach einem solchen (unelastischen) Stoß ergibt.*

- **Eine Simulation zu ein- und zweidimensionalen Stößen**

Antwortbox 1: Skizzen zum Vortrag

(individuelle Eintragungen)

Antwortbox 2: Skizzen zum Vortrag

(individuelle Eintragungen)

Zur Übung

- **Die New York Times, Prof. Goddard und der Rückstoß**

Antwortbox 1: Argumentation des Kommentators

Insgesamt zieht der Kommentar Goddards Ideen in Zweifel. (Auch wenn er an manchen Stellen Zugeständnisse macht.)

Textstellen:

- *Wenn man jedoch die Mehrfachladungsrakete als ein Reisemittel zum Mond betrachtet, fängt man an zu zweifeln, ...*
- *Zu behaupten, dass dies der Fall wäre, hieße, ein grundlegendes Gesetz der Dynamik zu leugnen ...*

Antwortbox 2: Zentrale These

Auf einem Weg zum Mond könnte die Rakete im luftleeren Raum außerhalb der Atmosphäre weder beschleunigen noch ihre Geschwindigkeit aufrechterhalten.

Antwortbox 3: Argumente des Autors

- *Im Vakuum kann es keinen Rückstoß geben.*
- *Prof. Goddard missachtet grundlegende Gesetze der Dynamik*
- *Goddard bewegt sich mit seiner Idee eher auf einer Ebene wie ein fiktiver Roman von Jules Verne, der in seine Geschichte aus literarischen Gründen absichtlich einen ähnlichen Fehler eingebaut hat. Einem Wissenschaftler sollte so ein Fehler nicht unterlaufen.*

Antwortbox 4: Mögliche Einwände gegen die Argumentation

Der Autor des Artikels nimmt folgende mögliche Einwände vorweg und nimmt dazu Stellung:

- *Es spricht aus physikalischen Gründen nichts dagegen, dass eine Mehrfachladungsrakete funktionieren kann. (Ja, aber nur innerhalb der Lufthülle der Erde)*
- *Prof. Goddard sollte als Lehrstuhlinhaber und mit dem Hintergrund der renommierten Smithsonian Institution eigentlich die physikalischen Gesetze von Actio und Reactio kennen. (Sicherlich, aber er hat sie nicht einmal auf High-School-Niveau verstanden.)*
- *Goddards Rakete könnte durchaus den Mond erreichen. (Richtig, aber nur, wenn sie schon vor dem Verlassen der Atmosphäre eine hinreichend große Geschwindigkeit besitzt, um bremsende und ablenkende Kräfte zu überwinden.)*

Antwortbox 5: Physikalische Vorstellungen des Autors

Der Autor geht davon aus, dass außerhalb des Systems Rakete Materie vorhanden sein muss, die den Treibstoffgasen einen Widerstand entgegensetzt. Im luftleeren Raum würden die Kräfte des Raketentriebwerks ins Leere gehen.

Tatsächlich ist es so, dass durch die Verbrennung des Treibstoff Gase entstehen, die unter hohem Druck durch den Querschnitt der Düse getrieben werden. Durch die damit verbundene Gegenkraft wird die Rakete vorwärtsgetrieben.

Andere Sichtweise: Vor der Verbrennung ist das System Rakete-Brennstoff in Ruhe. Bei der Verbrennung werden Gase mit hoher Geschwindigkeit nach hinten ausgestoßen. Nach dem Impulserhaltungssatz bleibt der Schwerpunkt erhalten, die Rakete muss sich also nach vorne bewegen. Ein Abstoßen von zusätzlicher Materie ist nicht erforderlich.

<u>Antwortbox 6: Gemeinsamkeiten von Goddard und Jules Verne</u>

In der Geschichte von Jules Verne lassen die Reisenden einen kleinen Satelliten unter sich explodieren. Durch den Rückstoß können sie die Bahn um den Mond verlassen. Der Satellit bewirkt also Ähnliches wie die Treibstoffkügelchen der Rakete Goddards.

- **Aufgaben zum Impulserhaltungssatz**

<u>Aufgabe 1: Gartenschlauch</u>

Der Schlauch wird infolge Rückstoßeffekts nach hinten geschleudert und führt dabei „chaotische“ Bewegungen aus.

<u>Aufgabe 2: Löschflugzeuge</u>

Das aufzunehmende Wasser muss die Geschwindigkeit des Flugzeugs erhalten, daher bekommt es einen Impulszuwachs und dieser muss durch eine stärkere Schubwirkung bzw. Schubkraft der Triebwerke „erzeugt“ werden.

<u>Aufgabe 3: Nagelbrett</u>

Hohlblockstein mitsamt Fakir erhalten aufgrund ihrer weit überwiegenden Masse gegenüber dem Hammer nur eine geringe Geschwindigkeit (Impulserhaltungssatz). Durch die hinreichend große Auflagefläche aufgrund der vielen Nagelspitzen dringen die Nägel – bei entsprechend koordinierter Haltung des Fakir – nicht in dessen Haut ein.

<u>Aufgabe 4: Windgetriebene Boote</u>

Boote oben: bewegt sich nach rechts

Boote Mitte: bewegt sich nicht (Impuls im Segel wird durch Rückstoß des Gebläses ausgeglichen)

Boote oben: bewegt sich nach links (Rückstoß des Gebläses aufgrund der nach rechts weggestoßenen Luft)

<u>Aufgabe 5: Nagel in federndes Brett</u>

Hält man einen massereichen Gegenstand hinter das Brett, übernimmt nicht nur das Brett sondern auch der Gegenstand den Impuls. Wegen der deutlich vergrößerten

Gesamtmasse von Brett und Gegenstand, bewegen sich beide viel weniger als das Brett allein.

Aufgabe 6a: „Gegenwirkung“ und „Drehrückstoß“

Rückstoß und Impulserhaltungssatz sowie Drehimpuls und Drehimpulserhaltungssatz

Aufgabe 6b: Fachsprachliche Verbesserungen

Rückstoß und Impulserhaltungssatz sowie Drehimpuls und Drehimpulserhaltungssatz

Aufgabe 7: Berechnung nach erstem Zusammenstoß

Rechnung über Verwendung von Impuls- und Energieerhaltungssatz für die kinetische Energien. Es ergeben sich die beiden Formeln:

$v_1' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot (2 \cdot v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$ *und* $v_2' = \frac{m_2 \cdot v_2 + m_1 \cdot (2 \cdot v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$.

Bestätigung der Ergebnisse der Simulation: v_{1x}*=-2,78m/s,* v_{2x}*=-0,87m/s .*