

## Lösungen zu den tet.folio-Aufgaben Mechanische Schwingungen

Die nachfolgenden Lösungen richten sich in erster Linie an Lehrkräfte. Es sind daher nicht in allen Fällen ausführliche Lösungen angegeben.

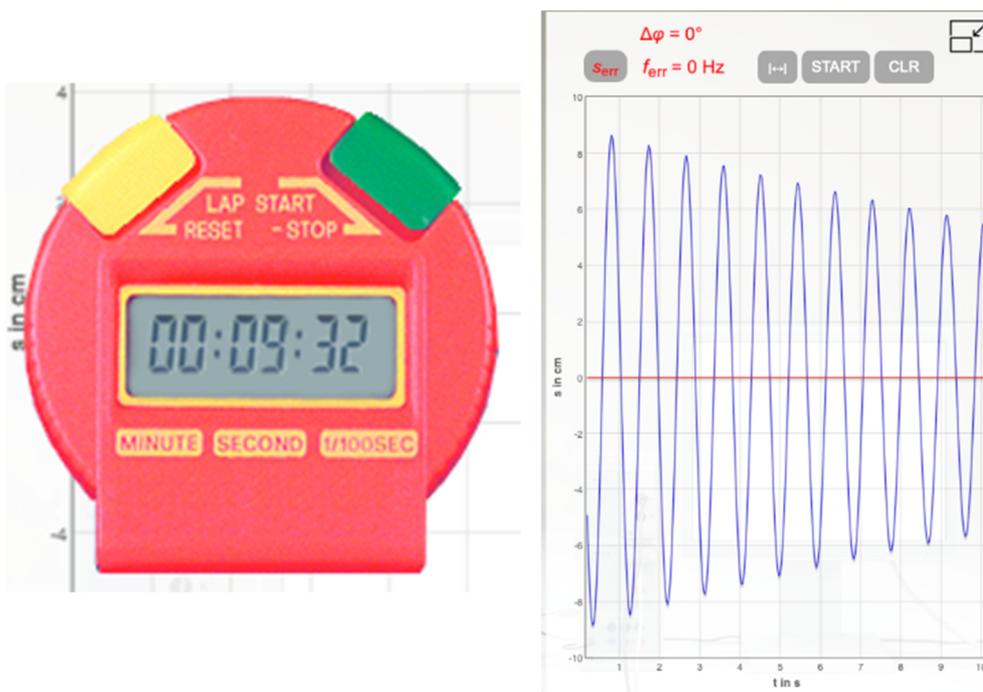
### Vorbemerkung

#### • Einführung

##### Antwortbox 1: Schwingungsdauer

Die Dauer von 10 Schwingungen ergibt sich bei Messung mit der Stoppuhr zu 9,32 s. Die Dauer einer Schwingung beträgt unter Berücksichtigung der Messgenauigkeit also etwa  $T = 0,93$  s.

Hier ein Bildschirmfoto:



##### Antwortbox 2: Startzeitpunkt und Anzahl der Perioden

Andere Punkte wie die Maxima sind im Bewegungsablauf schwer zu lokalisieren, zumal sich die Auslenkung mit der Zeit ändert.

##### Antwortbox 3: Schwingungsdauer aus $s(t)$ -Diagramm

Aus dem  $s(t)$ -Diagramm lässt sich für 10 Schwingungen eine Dauer von 9.3 s ablesen. Die Übereinstimmung mit der Stoppuhrmessung ist gut. Die Amplitude der Schwingung nimmt mit der Zeit ab.

##### Antwortbox 4: Stromstärke für Zurückkriechen des Pendelkörpers

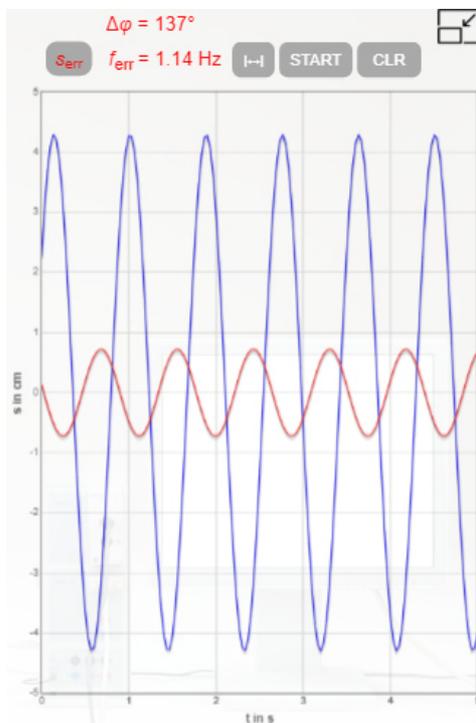
Die Stromstärke beträgt ca. 3,4 A. Am besten wird das sichtbar, wenn die Aufzeichnung der Schwingung mitläuft.

### Antwortbox 5: Schwingungsfrequenz des Resonators

Der Resonator schwingt nach dem Einschwingvorgang immer mit der Frequenz des Erregers.

Zusätzliche Beobachtung: Bei kleinen Erregerfrequenzen schwingen Resonator und Erreger gleichphasig, bei großen Erregerfrequenzen gegenläufig.

### Antwortbox 6: Amplituden und Schwingungsdauer von Resonator und Erreger



(Beachten Sie die Skalierungen der beiden Achsen)

---

## *Freie Schwingungen eines Fadenpendels*

---

### • **Das Fadenpendel (Experiment Teil 1)**

#### Antwortbox 1: Begründete Hypothesen

Die Schwingungsdauer  $T$  könnte abhängen von

- der Fadenlänge: je länger der Faden desto länger der Schwingungsweg
- der Auslenkung: ebenfalls längerer Schwingungsweg
- der Pendelmasse: größere Massen sind träger
- der Größe und Form des Pendels: führt zur Dämpfung und Verlangsamung
- Art der Aufhängung: Faden reibt oder wird geknickt und absorbiert Bewegungsenergie

### Antwortbox 2: Experimentelles Vorgehen

*Variablenkontrolle: eine Größe wird bei der Messung von  $T$  variiert, alle anderen werden jeweils konstant gehalten.*

### Antwortbox 3: Begründung

- 1. Amplitude: Ihr Einfluss spielt bei jeder Messung eine Rolle und sollte geklärt sein*
- 2. Masse: Ist mit wenig Aufwand zu variieren*
- 3. Fadenlänge: Aufwändiger zu kontrollieren*

## • **Das Fadenpendel (Experiment Teil 2)**

### Antwortbox 1: Abhängigkeit von der Amplitude

*Feststellung: Es ist praktisch keine Veränderung der Schwingungsdauer festzustellen.*

### Antwortbox 2: Begründung

*Bei größeren Amplituden ist die Beschleunigungsstrecke größer. Damit steigt die Maximalgeschwindigkeit am tiefsten Punkt. Die größere Geschwindigkeit kompensiert die Effekte der größeren Strecke.*

### Antwortbox 3: Begründung

*Bei einer Messdauer über 10 (oder mehr) Schwingungen verkleinern sich Messfehler, relativ auf eine Schwingung bezogen.*

### Antwortbox 4: Abhängigkeit von der Masse

*Feststellung: Es ist praktisch kein Einfluss der Masse des Pendelkörpers auf die Schwingungsdauer festzustellen.*

### Antwortbox 5: Begründung

*Ähnlich wie beim freien Fall steigen sowohl Gravitationskraft als auch Massenträgheit im gleichen Maße wie die Masse. Es wird also zusätzliche Kraft benötigt, um die größere Masse auf eine gleiche Geschwindigkeit zu beschleunigen.*

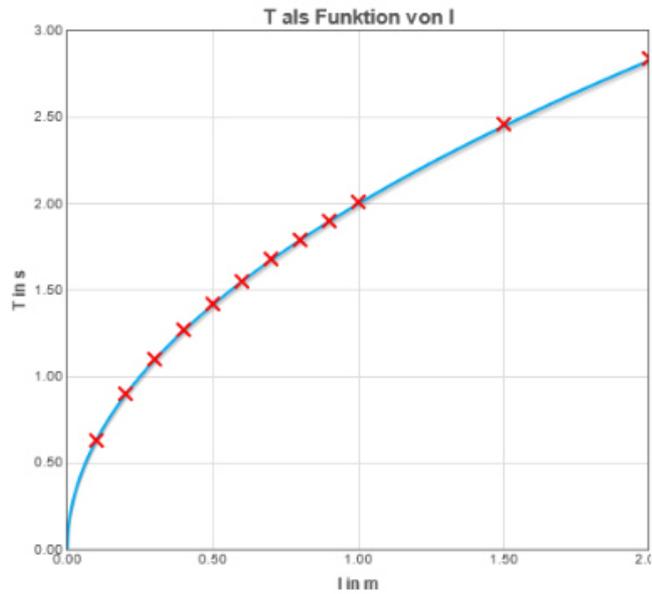
### Antwortbox 6: Quantitative Abhängigkeit von der Fadenlänge

*Aus der graphischen Darstellung der Messwerte ergibt sich ein Anwachsen von  $T$  proportional zur Wurzel der Fadenlänge. Die physikalische Bedeutung des Proportionalitätsfaktors  $a$  ist noch zu klären.*

*Bildschirmfoto:*

Achtung: Dezimalpunkt statt -komma eingeben.

	l in m	T in s
3	0.4	1.27
4	0.5	1.42
5	0.6	1.55
6	0.7	1.68
7	0.8	1.79
8	0.9	1.90
9	1.0	2.01
10	1.5	2.46
11	2.0	2.84
12		
13		



y= a\*sqrt(x)

a= 2 0 5

- 0.1 0.63
- 0.2 0.90
- 0.3 1.10
- 0.4 1.27
- 0.5 1.42
- 0.6 1.55
- 0.7 1.68
- 0.8 1.79
- 0.9 1.90
- 1.0 2.01
- 1.5 2.46
- 2.0 2.84

Antwortbox 7: Vergleich und prozentuale Abweichung

Hier sind als Referenz für die Messungen die theoretisch berechneten Werte angegeben. Der berechnete Proportionalitätsfaktor a entspricht physikalisch dem Wert

$$a = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{g}} = 2,006 \text{ s} \cdot \text{m}^{-2} . \text{ Er kann zur Abschätzung des prozentualen Messfehlers}$$

mit dem aus den Messungen mittels Schieberegler ermittelten Wert für a verglichen werden.

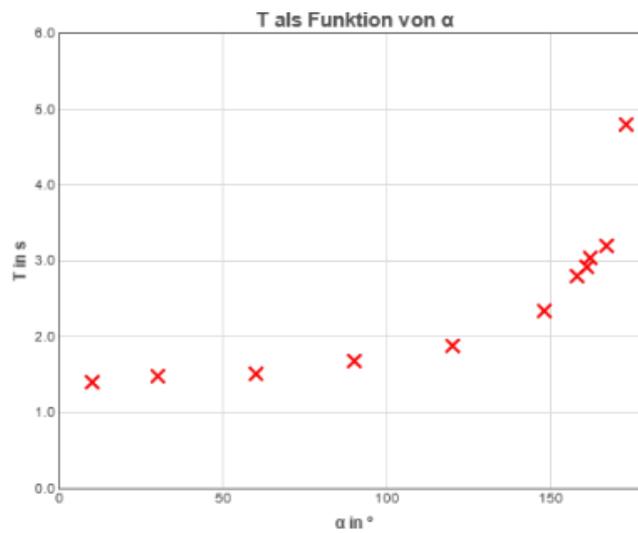
- **Das Fadenpendel (beliebige Amplitude / Simulation / Modell)**

### Antwortbox 1:

Bildschirmfoto:

Achtung: Dezimalpunkt statt -komma eingeben.

	$\alpha$ in $^\circ$	T in s
1	10	1.40
2	30	1.48
3	60	1.51
4	90	1.68
5	120	1.88
6	148	2.34
7	161	2.92
8	158	2.80
9	162	3.04
10	167	3.20
11	173	4.8
12		



10	1.40
30	1.48
60	1.51
90	1.68
120	1.88
148	2.34
161	2.92
158	2.80
162	3.04
167	3.20
173	4.80

### Antwortbox 2: Pendellänge

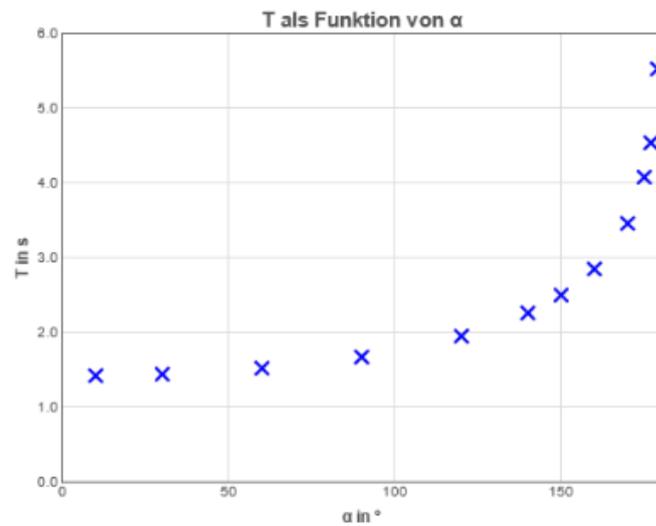
Die Pendellänge, gemessen vom Aufhängungspunkt bis zur Mitte des Pendelkörpers, beträgt 0,5 m.

### Antwortbox 3: Schwingungsdauer bei größeren Startwinkeln

Bildschirmfoto

Achtung: Dezimalpunkt statt -komma eingeben.

	$\alpha$ in $^\circ$	T in s
1	10	1.42
2	30	1.44
3	60	1.52
4	90	1.67
5	120	1.95
6	140	2.26
7	150	2.5
8	160	2.85
9	170	3.46
10	175	4.08
11	177	4.54
12	179	5.53
13		



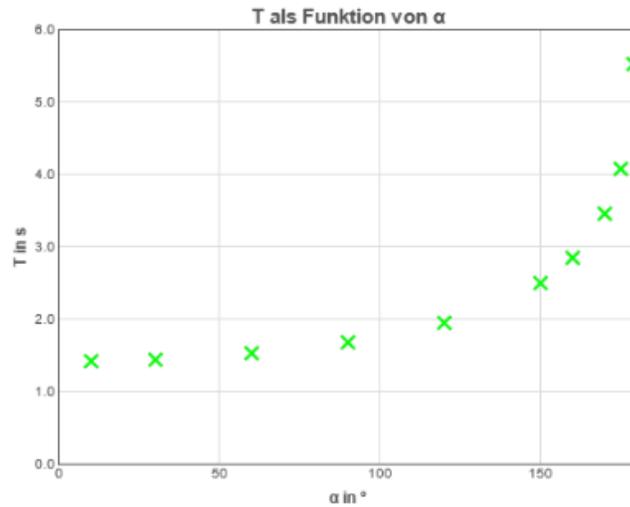
10 1.42  
30 1.44  
60 1.52  
90 1.67  
120 1.95  
140 2.26  
150 2.50  
160 2.85  
170 3.46  
175 4.08  
177 4.54  
179 5.53

Antwortbox 4: Auswertung Excel-Modellierung

*Bildschirmfoto*

Achtung: Dezimalpunkt statt -komma eingeben.

	$\alpha$ in $^\circ$	T in s
1	10	1.42
2	30	1.44
3	60	1.53
4	90	1.68
5	120	1.95
6	150	2.50
7	160	2.85
8	170	3.46
9	175	4.08
10	179	5.53
11		



10	1.42
30	1.44
60	1.53
90	1.68
120	1.95
150	2.50
160	2.85
170	3.46
175	4.08
179	5.53

### • Die Masse der Erde

Antwortbox 1: Schwingungsdauer bei kleinem Winkel

Als Schwingungsdauer des Pendels (S.11) wurde bei kleinen Winkeln  $T = 1,4$  s gemessen.

Antwortbox 2: Fallbeschleunigung

Durch Umstellen der Formel für die Schwingungsdauer ergibt sich für die Fallbeschleunigung  $g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2}$ . Mit  $T = 1,4$  s ergibt sich  $g = 10,07$  m/s<sup>2</sup>, in befriedigender Übereinstimmung mit dem erwarteten Wert.

Antwortbox 3: Himmelspol-Höhenänderung und Erdradius

Bei einer Wanderung nach Norden in der Karte ganz links um 1000 km (von einem Punkt im Mittelmeer zwischen Italien und Sardinien bis zu einem Punkt an der tschechischen Grenze) ändert sich die Polhöhe um etwa 9°. Daraus ergibt sich für den halben Erdumfang eine Länge von 20000 km. Der daraus berechnete Erdradius beträgt  $R_{\text{Erde}} = 6366$  km. (Referenzwert: 6371 km)

#### Antwortbox 4: Herleitung der Formel für den Erdradius

Al-Biruni führte eine sehr präzise Messung des Winkels  $\alpha$  zwischen der Waagerechten und der Horiziontrichtung (AC) durch. Diese Linie und der Erdradius bilden einen rechten Winkel (Tangente am Punkt C). Damit ist der Winkel zwischen MC und MA gleich  $\alpha$  (Vergleich der Winkelsummen).

Es gilt damit die trigonometrische Beziehung  $\frac{R}{R+h} = \cos \alpha$ . Umformen führt zur Formel

$$R = \frac{h \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

Anmerkung:

Sie können die al-Biruni-Formel verwenden, um selbst den Radius der Erde zu bestimmen. Am leichtesten geht das, wenn Sie demnächst die Gelegenheit zu einer Flugreise haben, besonders gut beim Flug über das Meer. Installieren Sie am besten vorher auf Ihrem Smartphone eine geodätische App (s. unten). Lassen Sie sich die genaue Flughöhe  $h$  mitteilen, wenn das Flugzeug die Reishöhe erreicht hat. Peilen Sie nun unter Verwendung der App den Horizont an, lesen Sie den Winkel ab, setzen Sie die Werte in die Formel ein.

Mögliche Apps z.B.: Theodolite (iOS)

Dioptra (Android)

Geocam (Android)

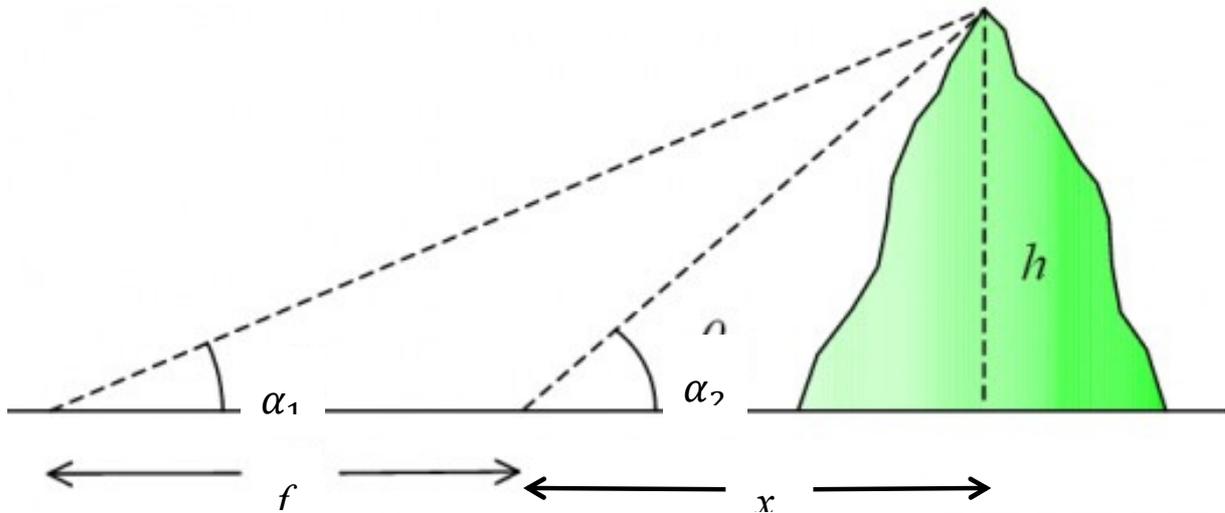
#### Antwortbox 5: Masse der Erde

Einsetzen der Referenzwerte in die Formel für  $M_{\text{Erde}}$  oben auf der Seite ergibt

$$M_{\text{Erde}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

#### • Ein historischer Aspekt der Erdvermessung

Antwortbox 1: Herleitung der Bestimmungsgleichung für die Berghöhe



Es gilt:  $\frac{h}{\tan \alpha_1} = d + x$  und  $\frac{h}{\tan \alpha_2} = x$ . Nach Einsetzen für  $x$  und Umformen ergibt sich

$$h = \frac{d}{\frac{1}{\tan \alpha_1} - \frac{1}{\tan \alpha_2}} \quad \text{oder} \quad h = \frac{d \cdot \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}$$

#### Antwortbox 1: Notwendige Mindestentfernung vom Berg

Am besten lässt sich die Situation einschätzen, wenn man in Google-Maps im Menü ganz oben links die Option „Gelände“ wählt und nahe an den Berg heranzoomt. Dann werden Maßstab und Höhenlinien sichtbar. Mit deren Hilfe lässt sich abschätzen, dass die Ebene etwa in einer horizontalen Entfernung von 1,5 km vom Berggipfel beginnt.

#### Antwortbox 2: Berghöhe über Ebenenniveau

Mit der oben angegebenen Einstellung lässt sich über die Höhenlinien die Höhendifferenz bestimmen. Sie beträgt etwa 420 m.

#### Antwortbox 3: Herleitung einer Formel für die Berghöhe

Die Winkel in den Dreiecken DAE und CHD sind gleich (Begründung z.B. über Stufenwinkel an Parallelen), deshalb ergeben sich ähnliche Dreiecke.

Ähnliches gilt für die Dreiecke HGC und CFD (Begründung z.B. über Winkelsummen).

Die Strecke HC kann mit Hilfe der Strahlensätze bestimmt werden:  $HC:DC = AD:AE$ . Alle anderen Größen außer HC sind bekannt oder lokal messbar.

Ebenfalls mit Hilfe der Strahlensätze ergibt sich:  $HG:HC = CF:CD$ . Außer HG, der gesuchten Berghöhe  $h$ , sind alle anderen Größen bekannt. Der Punkt G senkrecht unter dem Berggipfel muss dafür nicht sichtbar sein.

Anmerkung: Gegenüber dem ersten Verfahren zur Berghöhenbestimmung hat al-Birunis Verfahren deutliche Vorteile: Die Messung kann lokal an einem einzigen Ort erfolgen und erfordert die genaue Bestimmung nur einer einzigen Größe. Es müssen insbesondere keine Strecken zwischen zwei Messpunkten im Gelände ausgemessen

werden und es entfällt die zweimalige Messung kleiner Winkel, womit mögliche Fehlerquellen vermieden werden.

Antwortbox 4: Notwendige Mindestentfernung vom Berg

s. Antwortbox 1

Antwortbox 5: Berghöhe über Ebenenniveau

s. Antwortbox 2

Antwortbox 6: Streckenlänge  $b = AE$

Durch trigonometrische Berechnungen mit dem Dreieck HGC erhält man für die Strecke HC bei einer Entfernung von 2,0 km eine Länge von 2043,624 m. Eingesetzt in die entsprechende Gleichung (s. Antwortbox 3) ergibt sich für AE ein Wert von 0,122 mm ! Die Länge der Strecke  $b = BE$  ergibt sich daraus zu 0,49988 m.

Anmerkung: Al-Biruni soll für seine Messungen tatsächlich ein Quadrat der Kantenlänge 1 Kubit (etwa 0,5 m) benutzt haben. Das würde eine sehr hohe Präzision des angefertigten Instruments und der Messung (und eventuell ein paar zusätzliche Tricks wie z.B. eine Messskala in weiterer Entfernung) verlangen. Andererseits hat Al-Biruni auch in anderen Fällen Winkel mit der Genauigkeit von Bogenminuten gemessen.

---

### *Freie Schwingungen eines Federpendels*

---

#### • **Das Federpendel (Experiment Teil 1)**

Antwortbox 1: Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Startamplitude

Aus dem  $s(t)$ -Diagramm lässt sich für 10 Schwingungen eine Dauer von 9.3 s ablesen, damit gilt:  $T = 0,93$  s. Die Übereinstimmung mit der Stoppuhrmessung ist gut. Die Amplitude der Schwingung nimmt mit der Zeit ab, die Amplitude hat jedoch keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer.

Antwortbox 1: Physikalische Größen, die die Schwingungsdauer des Federpendels beeinflussen

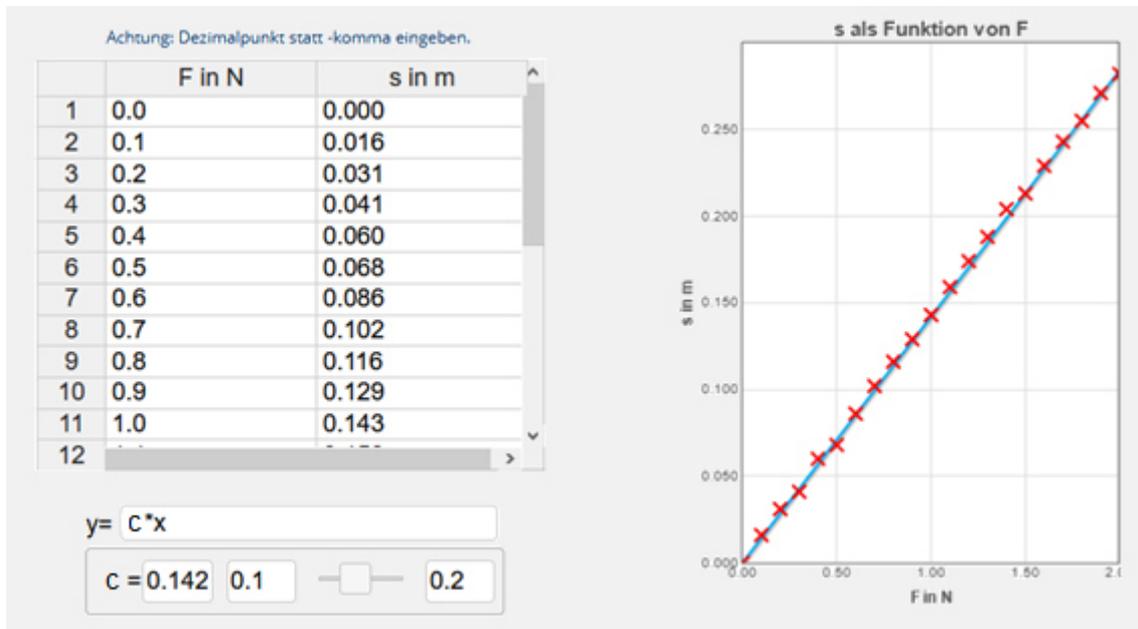
- Die Federkonstante: Je härter die Feder, desto stärker die rücktreibenden Kräfte,  $T$  wird kleiner.
- Die Masse: Je größer die Masse, desto träger reagiert das Pendel,  $T$  wird größer

#### • **Das Federpendel (Experiment Teil 2)**

### Antwortbox 1: Federkonstante

Aus den Messungen und der Steigungsgeraden durch die Messpunkte ergibt sich für  $m$  ein Wert von  $s/F = 0,142 \text{ m/N}$ . Daraus errechnet sich ein Wert für die Federkonstante  $D = F/s$  von  $D = 7,042 \text{ N/m}$ .

Bildschirmfoto



0.1 0.016

0.2 0.031

0.3 0.041

0.4 0.060

0.5 0.068

0.6 0.086

0.7 0.102

0.8 0.116

0.9 0.129

1.0 0.143

1.1 0.159

1.2 0.174

1.3 0.188

1.4 0.204

1.5 0.213

1.6 0.229

1.7 0.243

1.8 0.255

1.9 0.271

Antwortbox 2: Masse des Pendelkörpers

Aus den oben ermittelten Werten für  $T$  und  $D$  ergibt sich durch Einsetzen in die Formel ein Wert von  $m = 0,154 \text{ kg} = 154 \text{ g}$ . Die Ablesung auf der Waage zeigt einen Wert von  $m = 150 \text{ g}$ . (Abweichung also etwas weniger als 3%).

Antwortbox 3: Passende Werte

Bei einer Federkonstante von  $100 \text{ N/m}$  steigt die Auslenkung linear mit anwachsender Kraft. Ähnliches gilt bei anderen Federkonstanten. Der Quotient  $F/s$  ergibt immer den Wert der Federkonstanten.

Antwortbox 4: Argumente pro/contra

Bei parallel bzw. nebeneinander angeordneten Federn wirken zwei Federkräfte in die gleiche Richtung. Sie addieren sich also:  $D = D_1 + D_2$ .

Sind die Federn hintereinander bzw. in Reihe angeordnet, hängt die Ausdehnung und damit die Größe der gemeinsamen Federkraft überwiegend von der weicheren Feder ab. Durch die weitere Feder wird die Auslenkung höchstens größer,  $D$  insgesamt also eher kleiner. Es gilt also die andere Gleichung.

Anmerkung: Bei elektrischen Widerständen ist es umgekehrt. Bei Widerständen in Reihe steigt der Gesamtwiderstand, weil der Stromfluss verringert wird. Bei parallelgeschalteten Widerständen wird der Stromfluss im Wesentlichen durch den kleineren Widerstand bestimmt, durch den anderen fließt ggf. noch ein zusätzlicher Strom. Der Gesamtwiderstand wird also kleiner als der jedes Einzelwiderstands.

Bei Kondensatoren wiederum ist es ähnlich wie bei den Federn: Parallel geschaltet vergrößert sich die Gesamtkapazität, weil bei gleicher Spannung mehr Ladung gespeichert werden kann. in Reihe geschaltet sinkt sie auf höchstens den kleinsten Einzelwert der Kapazitäten.

Antwortbox 5: Messungen in der Simulation

Die Hypothesen werden durch die Experimente bestätigt.

Antwortbox 6: Federkonstante der Teilfedern

Da die Federkonstanten beider Teilfedern gleich sind, gilt  $1/D = 2/D_{\text{Teil}}$ . Daraus folgt für jede der beiden Teilfedern  $D_{\text{Teil}} = 2D$ .

- **Gedämpftes Federpendel**

Antwortbox 1: Abnahme der Amplituden

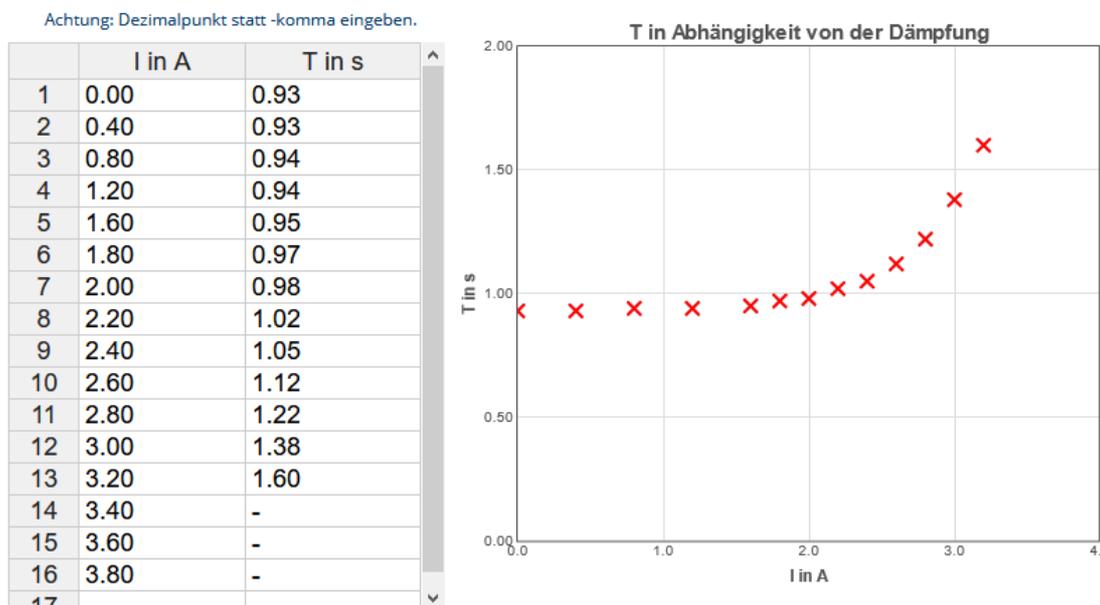
Man kann durch Anpassung der beiden Schieber gut erreichen, dass die Amplituden durch eine fallende Exponentialkurve angepasst werden. Das gilt auch für die Amplituden unterhalb der Zeitachse.

Antwortbox 2:

Der Parameter  $a$  muss angepasst werden, während der Parameter  $b$ , der die „Schnelligkeit“ der Abnahme angibt, konstant bleibt.

Antwortbox 3: Schwingungsdauer beim gedämpften Federpendel

Bildschirmkopie:



- 0.00 0.93
- 0.40 0.93
- 0.80 0.94
- 1.20 0.94
- 1.60 0.95
- 1.80 0.97
- 2.00 0.98
- 2.20 1.02
- 2.40 1.05
- 2.60 1.12
- 2.80 1.22
- 3.00 1.38
- 3.20 1.60
- 3.40 -
- 3.60 -

3.80 -

Bei geringen Dämpfungen ändert sich die Schwingungsdauer  $T$  kaum. Ab einem Schwellenwert (bei einer Stromstärke von ca. 2,0 A) gilt jedoch immer deutlicher: Je größer die Dämpfung, desto größer  $T$ . Der Anstieg von  $T$  ist überproportional.

Antwortbox 4:

Der aperiodische Grenzfall tritt für die Dämpfungsstromstärke von etwa 3,4A auf.

Antwortbox 5:

Die Schwingungsdauer beträgt 0,93s.

Antwortbox 6:

In der logarithmischen Darstellung ergibt sich eine Gerade. Schlussfolgerung: Die Abnahme der Amplituden erfolgt exponentiell.

Antwortbox 7:

$r_{apGr}=13,4$ .

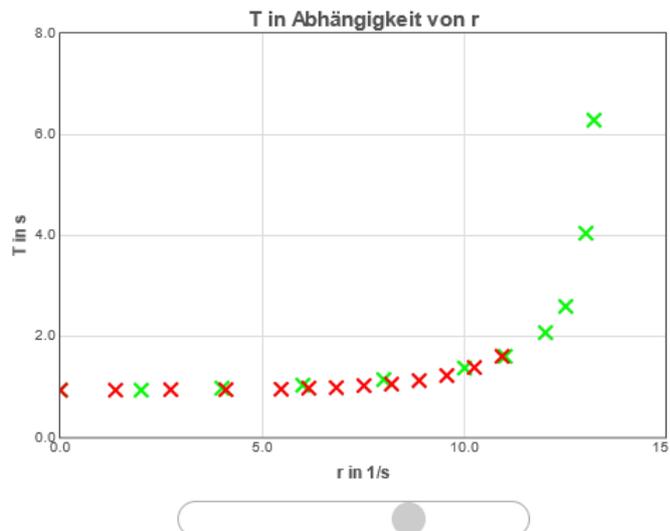
Antwortbox 8 / Antwortbox 9:

Man kann die Kurven zufriedenstellend aneinander anpassen.

Bildschirmkopie:

Achtung: Dezimalpunkt statt -komma eingeben.

	r in 1/s	T in s
1	0.0	0.93
2	2.0	0.93
3	4.0	0.97
4	6.0	1.03
5	8.0	1.14
6	10.0	1.37
7	11.0	1.60
8	12.0	2.07
9	12.5	2.59
10	13.0	4.04
11	13.2	6.28
12	13.3	11.89
13		



0.0 0.93  
2.0 0.93  
4.0 0.97  
6.0 1.03  
8.0 1.14  
10.0 1.37

- 11.0 1.60
- 12.0 2.07
- 12.5 2.59
- 13.0 4.04
- 13.2 6.28
- 13.3 11.89

- **Das Federpendel (Simulation)**

Antwortbox 1:

$$D = \frac{F}{\Delta s} = \frac{2N}{0,62m} \approx 3,2 \frac{N}{m}$$

Antwortbox 2:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}, \text{ also nach } D \text{ umgestellt: } D = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m.$$

Mit Zahlen  $m=0,200\text{kg}$  und  $T=0,814\text{s}$ :  $D = 11,9 \frac{N}{m}$ .

Antwortbox 3:

Antwortbox 4:

---

*Freie Schwingungen: Theoretische Grundlagen*

---

- **Grundlagen: Faden- und Federpendel**

Antwortbox 1: Begründung der harmonischen Schwingung

*Man erkennt die harmonische Schwingung daran, dass trotz der deutlichen Abnahme der Schwingungsamplitude sich die Schwingungsdauer nicht verändert. Diese Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude ist ein Kriterium für das Vorliegen einer harmonischen Schwingung.*

*Rechnerische Begründung:*

*Genutztes Kriterium für den Nachweis: rücktreibende Kraft  $F_r$  ist proportional zur Elongation  $s$ .*

$$F_r = F_G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot A \cdot h \cdot g = \rho \cdot g \cdot A \cdot 2s, \text{ also } F_r \sim s.$$

( $h$  ist der Höhenunterschied zwischen linkem und rechtem Schenkel im Rohr).

### Antwortbox 2: Herleitung der Schwingungsdauer

Allgemein gilt:  $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ , wobei  $k$  der Proportionalitätsfaktor zwischen  $F_r$  und  $s$  ist (siehe  $m \cdot \ddot{s} + k \cdot s = 0$ ).

Gemäß vorstehender Aufgabenlösung ist  $k = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot A$ ,  $m$  ist die Masse der gesamten (bewegten) Flüssigkeit, also  $m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot l$ .

Damit erhält man:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot l}{2 \cdot \rho \cdot g \cdot A}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

### Antwortbox 3: Fehler bei der Kleinwinkelnäherung

Kopie aus einer Excel-Tabelle:

$\varphi$ in °	x Bogenmaß	Sin(x)	Abweichung in %
0	0,0000	0,0000	0,00%
1	0,0175	0,0175	0,01%
2	0,0349	0,0349	0,02%
3	0,0524	0,0523	0,05%
4	0,0698	0,0698	0,08%
5	0,0873	0,0872	0,13%
6	0,1047	0,1045	0,18%
7	0,1222	0,1219	0,25%
8	0,1396	0,1392	0,33%
9	0,1571	0,1564	0,41%
10	0,1745	0,1736	0,51%
11	0,1920	0,1908	0,62%
12	0,2094	0,2079	0,73%
13	0,2269	0,2250	0,86%
14	0,2443	0,2419	1,00%
15	0,2618	0,2588	1,15%
16	0,2793	0,2756	1,31%
17	0,2967	0,2924	1,48%
18	0,3142	0,3090	1,66%
19	0,3316	0,3256	1,86%
20	0,3491	0,3420	2,06%
21	0,3665	0,3584	2,27%
22	0,3840	0,3746	2,50%
23	0,4014	0,3907	2,74%
24	0,4189	0,4067	2,99%
25	0,4363	0,4226	3,25%
26	0,4538	0,4384	3,52%
27	0,4712	0,4540	3,80%
28	0,4887	0,4695	4,09%
29	0,5061	0,4848	4,40%
30	0,5236	0,5000	4,72%
31	0,5411	0,5150	5,05%



### Antwortbox 4: Fehler max. 1%

Lt. Tabelle:

Bei 14° beträgt der Fehler ca. 1%.

Bei 30° beträgt der Fehler ca. 5%.

### Antwortbox 5: Anwendung der Kleinwinkelnäherung

Das relevante Kriterium muss die geforderte Genauigkeit sein. Bei jedem noch so kleinen Winkel tritt bereits ein (wenn auch anfangs: sehr) kleiner Fehler auf.

- **Zusammenfassung: Harmonische Schwingungen**

Antwortbox 1: Namensbedeutung harmonische Schwingung

*Musikinstrumente erzeugen „harmonische“ Klänge – eben genau dann bzw. weil ihre Tonhöhe nicht von der Lautstärke des erzeugten Tons abhängt: Die Frequenz bzw. Schwingungsdauer ist unabhängig von der Amplitude.*

Antwortbox 2: Schnelles Erkennen einer harmonischen Schwingung

*Die Konstanz oder Nichtkonstanz der Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Amplitude der Schwingung ist ein sichtbares und/oder hörbares Kriterium für eine harmonische bzw. nichtharmonische Schwingung.*

*Bei der schwingenden Wassersäule und beim tauchenden Reagenzglas kann man sehr schön die Konstanz der Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Amplitude beobachten, während bei der hüpfenden Kugel die immer kürzer werdende Periodendauer sofort hörbar wird.*

---

*Erzwungene Schwingungen und Resonanz*

---

- **Voruntersuchungen mit dem IBE**

Antwortbox 1: Resonator-Schwingungsdauer

$T=0,93\text{ s}$

Antwortbox 2: Resonator-Schwingungsdauer im Vergleich zur Erreger-Schwingungsdauer

*Der Resonator schwingt – nach Beendigung des Einschwingvorgangs immer – mit der Schwingungsdauer des Erregers.*

Antwortbox 3: /

/

Antwortbox 4: Kurvenlage zueinander

*Bei sehr kleinen Werten von  $f_{\text{Err}}$ : keine Verschiebung, Phasenunterschied  $0^\circ$*

*Bei sehr großen Werten von  $f_{\text{Err}}$ : gegenläufige Bewegung, Verschiebung um  $180^\circ$*

### Antwortbox 5: Größtmögliche Amplitude

Die größtmögliche Amplitude tritt auf, wenn der Erreger mit der Eigenfrequenz des Resonators schwingt.

### Antwortbox 6: Verschiebung im Resonanzfall

Die zeitliche Verschiebung zwischen Erreger- und Resonatorschwingung beträgt eine viertel Periode, der Phasenverzug beträgt also  $90^\circ$ .

## • Aufnahme von Resonanzkurven mit dem IBE

### Antwortbox 1: Eigenfrequenz des Resonators

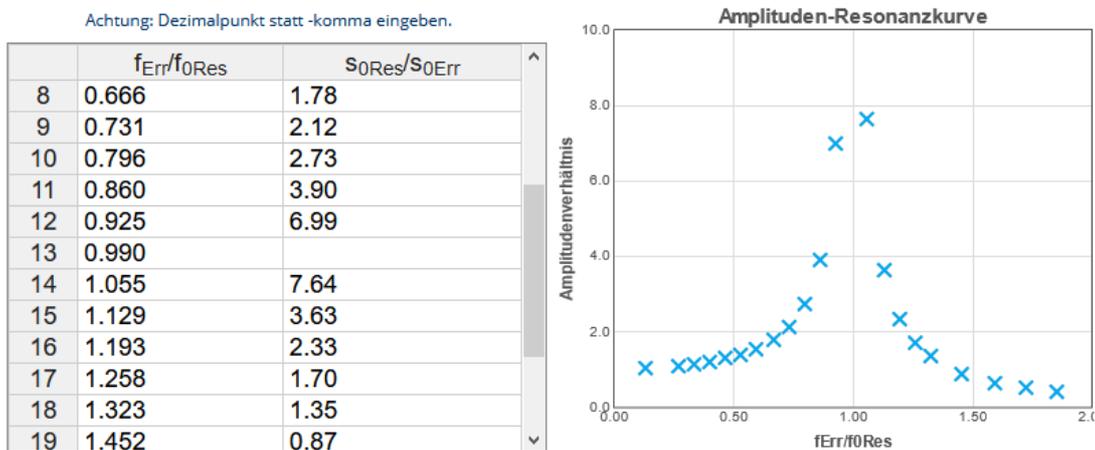
Bereits vorher gemessen:  $T=0,93$  s, also  $f = \frac{1}{T} = 1,08$  Hz.

### Antwortbox 2: Amplitude des Erregers

$s_{Err}=0,72$  cm (kann beispielsweise durch die geeignete Anpassung des Maßstabs der Hochachse gut bestimmt werden).

### Antwortbox 3: Messkurve

Bildschirmkopie:



0.130 1.03  
0.268 1.08  
0.333 1.13  
0.398 1.19  
0.463 1.30  
0.527 1.38  
0.592 1.53  
0.666 1.78  
0.731 2.12  
0.796 2.73

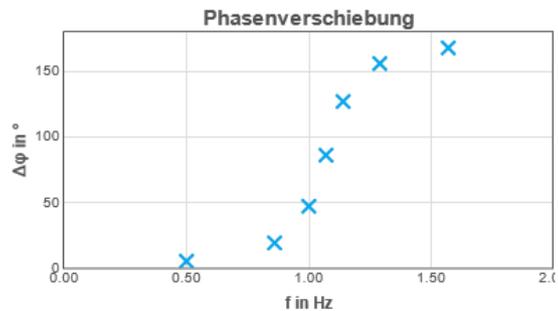
0.860 3.90  
 0.925 6.99  
 0.990  
 1.055 7.64  
 1.129 3.63  
 1.193 2.33  
 1.258 1.70  
 1.323 1.35  
 1.452 0.87  
 1.591 0.63  
 1.721 0.51  
 1.850 0.40

**Antwortbox 4: Messkurve**

Bildschirmkopie:

Achtung: Dezimalpunkt statt -komma eingeben.

	$f_{\text{Err}}$ in Hz	$\Delta\varphi$ in $^\circ$
1	0.50	5
2	0.86	19
3	1.00	47
4	1.07	86
5	1.14	127
6	1.29	156
7	1.57	168



0.50 5  
 0.86 19  
 1.00 47  
 1.07 86  
 1.14 127  
 1.29 156  
 1.57 168

**Antwortbox 5: Vorgehen**

... durch Bestimmung des Anteils der jeweiligen Kurven am Maßstabs des (verschiebbaren) Lineals in Bezug auf eine volle Schwingung des Erregers.

**Antwortbox 6: Beschreibung der Kurven / Resonanzkatastrophe**

*Kleine Erregerfrequenz: Resonator- und Erregeramplitude sind gleich groß.*

*Große Erregerfrequenz (weit oberhalb der Eigenfrequenz des Resonators): Resonatoramplitude geht gegen null.*

*Dazwischen liegt ein dämpfungsabhängiges Maximum, sofern die Dämpfung nicht allzu groß ist: Resonanzkatastrophe.*

#### Antwortbox 7: Gemeinsamkeiten und Unterschiede

*Alle Kurven beginnen bei der Phasenverschiebung  $0^\circ$  und enden bei einer Phasenverschiebung von  $180^\circ$ .*

*Unterschiede bestehen im Wesentlichen in der Schnelligkeit des „Übergangs“ von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$ .*

#### • **Untersuchungen im Modell**

##### Antwortbox 1: Resonator-Schwingungsdauer

*Die Schwingungsdauer beträgt  $T = 6,32s$ .*

##### Antwortbox 2: Resonator-Schwingungsdauer im Vergleich zur Erreger-Schwingungsdauer

*Nach dem Einschwingvorgang beträgt die Schwingungsdauer  $T \approx 32s$ , sie stimmt mit der des Erregers überein.*

##### Antwortbox 3: /

/

##### Antwortbox 4: Verschiebung in Rechtsrichtung

*Verschiebung für sehr kleine Werte von  $\omega$  ist praktisch nicht vorhanden, also  $0^\circ$ .*

*Verschiebung für sehr große Werte von  $\omega$  ist praktisch  $180^\circ$ .*

##### Antwortbox 5: Erregerfrequenz für größtmögliche Amplitude

*Der Resonanzfall liegt vor, wenn die Erregerfrequenz (ungefähr) gleich der Resonator-Eigenfrequenz ist, also derjenigen Frequenz, mit der der Resonanz frei schwingt.*

##### Antwortbox 6: Verschiebung im Resonanzfall

*Die Verschiebung im Resonanzfall beträgt etwa  $90^\circ$ , also eine Viertel Periode, mit der der Erreger dem Resonator vorausseilt.*

## Aufnahmen der Resonanzkurven im Modell

### Antwortbox 1:

#### Bildschirmkopie:

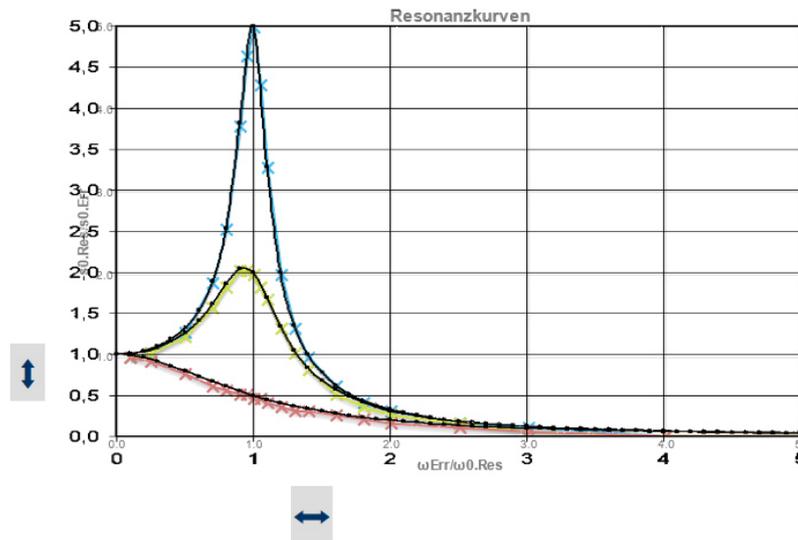
Messung des Amplitudenverhältnisses  $\frac{s_{0,Res}}{s_{0,Err}}$  für  $r_1 = 0, 2, r_2 = 0, 5$  und  $r_3 = 2, 0$ :

	$\omega_{Err}/\omega_{0,Res}$	$s_{0,Res}/s_{0,Err}(r_1)$	$s_{0,Res}/s_{0,Err}(r_2)$	$s_{0,Res}/s_{0,Err}(r_3)$
2	4.0	0.05	0.05	0.05
3	3.0	0.15	0.10	0.10
4	2.5	0.20	0.20	0.15
5	2.0	0.35	0.30	0.20
6	1.8	0.45	0.40	0.25
7	1.6	0.65	0.55	0.30
8	1.4	1.00	0.85	0.35
9	1.3	1.35	1.05	0.35
10	1.2	2.00	1.35	0.40
11	1.1	3.30	1.70	0.45
12	1.05	4.30	1.85	0.50
13	1.0	5.00	2.00	0.50
14	0.95	4.65	2.05	0.55
15	0.9	3.80	2.05	0.55
16	0.8	2.55	1.85	0.60
17	0.7	1.90	1.60	0.65
18	0.5	1.30	1.25	0.80
19	0.25	1.05	1.05	0.95
20	0.1	1.00	1.00	1.00
21				

4.0 0.05 0.05 0.05  
 3.0 0.15 0.10 0.10  
 2.5 0.20 0.20 0.15  
 2.0 0.35 0.30 0.20  
 1.8 0.45 0.40 0.25  
 1.6 0.65 0.55 0.30  
 1.4 1.00 0.85 0.35  
 1.3 1.35 1.05 0.35  
 1.2 2.00 1.35 0.40  
 1.1 3.30 1.70 0.45  
 1.05 4.30 1.85 0.50  
 1.0 5.00 2.00 0.50  
 0.95 4.65 2.05 0.55  
 0.9 3.80 2.05 0.55  
 0.8 2.55 1.85 0.60  
 0.7 1.90 1.60 0.65  
 0.5 1.30 1.25 0.80  
 0.25 1.05 1.05 0.95  
 0.1 1.00 1.00 1.00

### Antwortbox 2:

#### Bildschirmkopie:



**Antwortbox 3:**

Bildschirmkopie:

Messung der (Phasen-) Verschiebung für  $r_1 = 0, 2, r_2 = 0, 5$  und  $r_3 = 2, 0$ :

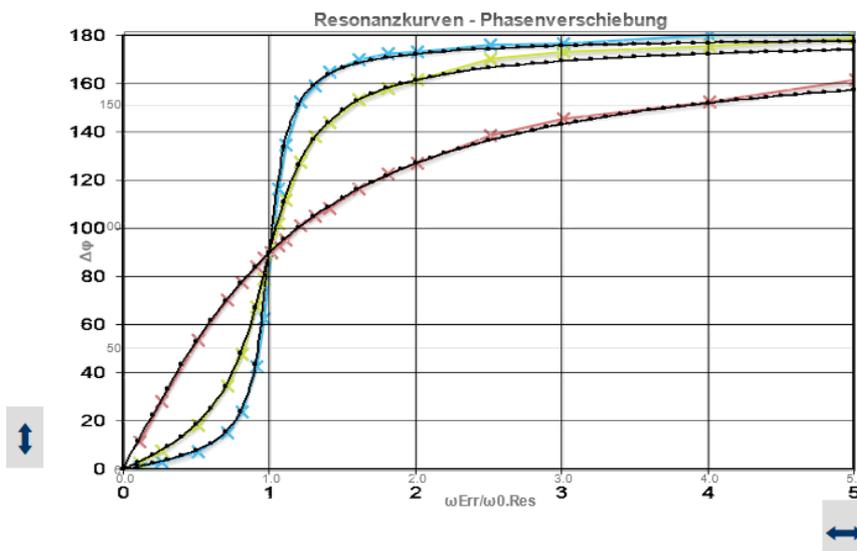
	$\omega_{Err}/\omega_{0.Res}$	$\Delta\phi(r_1)$	$\Delta\phi(r_2)$	$\Delta\phi(r_3)$
2	4.0	178.8	174.2	151.3
3	3.0	175.3	171.9	144.4
4	2.5	174.8	169.0	137.5
5	2.0	171.9	160.4	126.1
6	1.8	171.2	156.8	121.7
7	1.6	168.7	152.2	115.5
8	1.4	163.6	142.8	107.5
9	1.3	157.9	137.1	104.3
10	1.2	151.3	126.5	100.4
11	1.1	133.6	110.9	94.5
12	1.05	115.5	101.1	92.2
13	1.0	89.4	89.4	89.4
14	0.95	62.1	78.4	87.1
15	0.9	42.4	67.0	83.5
16	0.8	23.8	47.4	77.0
17	0.7	15.2	34.5	69.8
18	0.5	7.4	18.3	53.3
19	0.25	3.2	7.7	28.1
20	0.1	1.1	2.8	11.5
21				

- 4.0 178.8 174.2 151.3
- 3.0 175.3 171.9 144.4
- 2.5 174.8 169.0 137.5
- 2.0 171.9 160.4 126.1
- 1.8 171.2 156.8 121.7
- 1.6 168.7 152.2 115.5
- 1.4 163.6 142.8 107.5
- 1.3 157.9 137.1 104.3
- 1.2 151.3 126.5 100.4
- 1.1 133.6 110.9 94.5

1.05	115.5	101.1	92.2
1.0	89.4	89.4	89.4
0.95	62.1	78.4	87.1
0.9	42.4	67.0	83.5
0.8	23.8	47.4	77.0
0.7	15.2	34.5	69.8
0.5	7.4	18.3	53.3
0.25	3.2	7.7	28.1
0.1	1.1	2.8	11.5

#### Antwortbox 4:

Bildschirmkopie:



#### Antwortbox 5: Beschreibung Verfahren

Strategie zum Auffinden der Extrema: Wenn die Geschwindigkeit  $v(t)$  das Vorzeichen wechselt, liegt ein (relatives) Maximum in der  $s(t)$ -Kurve vor. Den Vorzeichenwechsel kann man durch Überprüfung eines negativen Produkts aus zwei aufeinanderfolgenden Werten erkennen.

#### • Untersuchungen mit einer Simulation

##### Antwortbox 1: Einschwingvorgang / Dämpfung

Eine größere Dämpfung führt erkennbar zu einer Verkürzung der Einschwingdauer. Diese ist erkennbar, wenn Resonator- und Erregerkurve zwar ggf. phasenversetzt, aber in jedem Fall stationär mit derselben Frequenz verlaufen.

### Antwortbox 2: Phasenverschiebung

*Die Phasenverschiebung ist anfangs  $0^\circ$ , erhöht sich mit zunehmender Erregerfrequenz und nähert sich bei weiter zunehmenden Erregerfrequenzen  $180^\circ$ .*

### • **Resonanzphänomene aus der Lebenswelt (1)**

#### Antwortbox 1: Stoßdämpferprüfung

*Die Erregerfrequenz wird langsam von kleinen zu großen (oder umgekehrt von großen zu kleinen) Frequenzen verändert. Der Wagen bzw. die Achse reagiert als Resonator auf die angebotene Frequenz mit unterschiedlicher Amplitude. Ein erkennbares Maximum wie im Bild deutet auf eine fehlerhafte Dämpfung eines Stoßdämpfers hin.*

#### Antwortbox 2: Zungenfrequenzmesser

*Der mechanische Frequenzmesser hat mehrere Resonatoren mit unterschiedlich abgestimmten Resonanzfrequenzen, sodass dann einer der Resonatoren in erkennbare Schwingungen versetzt wird, wenn die dargebotene Erregerfrequenz mit seiner Eigenfrequenz übereinstimmt.*

#### Antwortbox 3: Metronome

*Die Metronome gelangen in Gleichtakt. Sie haben sehr ähnliche Eigenfrequenzen, sodass der schwingende Untergrund (die Unterlage der Metronome) alle Metronome auf die gleiche Phasenlage zwingt.*

#### Antwortbox 4:

*Es wird der Resonanzfall ausgenutzt, d. h. Schwingungsdauer des Pendels wird so bemessen, dass sie mit der Schwingungsdauer des Turms übereinstimmt.*

#### Antwortbox 5:

*Ab Zeitmarke 11:00 handelt es sich um das bekannte Hin und Her der Energien bei „gekoppelten Pendeln“: Die Schwingung des Turms überträgt sich auf das Pendel und danach wieder zurück auf den Turm usw.*

#### Antwortbox 6:

*Mechanische Schwingungsenergie des Turms wird umgesetzt in Schwingungsenergie des Pendels, diese wird „vernichtet“ durch Reibung in der Dämpfungsflüssigkeit.*

#### Antwortbox 7:

*Die Masse eines Fadenpendels hat keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer. Wolfram hat eine große Dichte und wurde hier gewählt, um bei relativ kleinen Abmessungen viel Bewegungsenergie aufnehmen zu können, die durch Reibung dann „vernichtet“ werden kann.*

### Antwortbox 8:

Die Schwingungsebene des Pendels wurde zum Ende hin um  $90^\circ$  in die richtige Ausrichtung gebracht, zuvor schwang das Pendel fälschlicherweise nach vorne und hinten.

## • Resonanzphänomene aus der Lebenswelt (2)

### Antwortbox 1: Aufschaukeln

Im untersten Punkt: Aufstehen, d. h. Zuführung potentieller Energie durch (den) die Schaukelnde(n) durch Kraftausübung gegen die eigene Gewichtskraft.

Dies ist bei jedem Hin und Her der Schaukel sinnvoll, wenn auch motorisch nicht so ganz leicht zu realisieren.

Hinhocken in den Umkehrpunkten bedeutet „Verlust“ an Energie: Dieser Energieanteil muss vom Menschen aufgenommen werden.

### Antwortbox 2: Abbremsvorgang

„Entzug“ von Schwingungsenergie durch schnellen Übergang vom aufrechten Stand in die Hocke im untersten Punkt. Aufstehen in den Umkehrpunkten.

### Antwortbox 3: Botafumeiro

Wesentlich: Schnelles Hochziehen des Botafumeiro beim Durchgang durch den untersten Punkt (siehe Schaukel weiter oben).

### Antwortbox 4: Stellungnahme zu den Daten

Aus der Messung der Schwingungsdauer ( $T \approx 8,7$  s) ergibt sich ein wesentlich kleinerer Wert für die Pendellänge ( $l \approx 19$  m).

### Antwortbox 5: Seilmechanismus

Durch Übertragung der Bewegung des Zugseils per Welle mit Übersetzung gelingt es, das Pendelseil viel weiter hochzuziehen, als die Männer das Zugseil hochbewegen.

### Antwortbox 6: Kraft der 8 Männer

Der Botafumeiro erfährt die Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g \approx 540$  N. Jeder der Männer zieht erkennbar mit viel mehr als  $F_Z = \frac{1}{8} \cdot 540$  N.

Begründung: Über ein Rollensystem wird der Botafumeiro um ein Vielfaches derjenigen Strecke hochgezogen, die die Männer ihr Seil nach unten ziehen:  $l_{\text{Bota}} = k \cdot l_{\text{Männer}}$ . Wegen des Energieerhaltungssatzes ist daher über die kurze Strecke  $l_{\text{Männer}}$  die  $k$ -fache Kraft  $F_M = k \cdot F_G$  aufzubringen.

### Antwortbox 7: Ganggenauigkeit Pendeluhr

Die Uhr geht in einer Woche, also nach  $7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{s} = 604.800 \text{s}$ , um  $20 \text{s}$  vor. Dies ist eine Abweichung von  $\varepsilon = \frac{20 \text{s}}{604.800 \text{s}} = 0,0000331 = 0,00331\%$ . Um diesen Prozentsatz ist die Schwingungsdauer  $T_\varepsilon$  gegenüber der exakten Schwingungsdauer  $T$  verkürzt, die Pendellänge  $l_\varepsilon$  also gegenüber der „richtigen“ Pendellänge  $l$  derzeit zu klein.

Das Verhältnis der Schwingungsdauern ist folglich:  $\frac{T}{T_\varepsilon} = \frac{604800 \text{s}}{(604800 - 20) \text{s}} = 1,0000331$ .

Für beide Schwingungsdauern gelten die Formeln:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l_\varepsilon + \Delta l}{g}}$  und  $T_\varepsilon = 2\pi \sqrt{\frac{l_\varepsilon}{g}}$ .

Damit erhält man:  $\frac{T}{T_\varepsilon} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{l_\varepsilon + \Delta l}{g}}}{2\pi \sqrt{\frac{l_\varepsilon}{g}}} = \sqrt{\frac{l_\varepsilon + \Delta l}{l_\varepsilon}}$ , und damit nach  $\Delta l$  umgestellt:

$$\Delta l = \left[ \left( \frac{T}{T_\varepsilon} \right)^2 - 1 \right] \cdot l_\varepsilon .$$

Daraus ergibt sich:  $\Delta l \approx 0,000066 \cdot l$ . Das Pendel muss also um  $0,0066\%$  der augenblicklichen Pendellänge verlängert werden.

Beispiel: Ein  $1 \text{m}$  langes Pendel wäre dann um  $0,066 \text{mm}$  zu verlängern.

### Antwortbox 6: Pendeluhr und Raumtemperatur

Bei zunehmender Raumtemperatur verlängert sich das Pendel etwas, die Schwingungsdauer wird größer, die Uhr wird nachgehen.

---

### *Ausblick*

---

#### • **Gekoppelte Pendel**

##### Antwortbox 1: Beschreibung des Graphen

$s_1(t)$  und  $s_2(t)$  zeigen einen genläufigen Verlauf: Während die Amplituden des einen Oszillators abnehmen, nehmen die des anderen zu und umgekehrt.

##### Antwortbox 2: Verschiebung

$s_{1,0} = s_{2,0} \neq 0$  : keine Verschiebung

$s_{1,0} \neq 0$   $s_{2,0} = 0$  : Verschiebung um  $90^\circ$  (eine Viertelperiode)

$s_{2,0} = -s_{1,0} \neq 0$  : Verschiebung um  $180^\circ$  (entgegengesetzte Schwingungen)

##### Antwortbox 3: Schwingungsdauer

$s_{1,0} = s_{2,0} \neq 0$  :  $T_1 = 6,28 \text{ s}$

$s_{1,0} \neq 0$   $s_{2,0} = 0$  :  $T_1 = 6,22 \text{ s}$

$$s_{2,0} = -s_{1,0} \neq 0 : T_1 = 6,16 \text{ s}$$

Bei gegensinniger Ausgangslage ist die Schwingungsdauer am kleinsten, bei gleichsinniger Ausgangslage am größten. Bei einem anfänglichen Phasenversatz um  $90^\circ$  liegt der Wert etwa in der Mitte.

#### Antwortbox 4: Schwingungsdauer

Die blaue Kurve erleidet einen Phasensprung um  $180^\circ$  (eine halbe Periode), erkennbar am Abstand der beiden Maxima vor und nach dem Phasensprung.

#### Antwortbox 5: Energieaustausch

Der Energieaustausch findet statt zwischen dem eingebauten Pendel und dem Turm selbst. Beide Körper zeigen ein Hin und Her der maximalen Energie.

---

### *Exkurs: Akustische Schwingungen und auditive Wahrnehmung*

---

#### • **Physikalische Grundlagen der Klanganalyse**

##### Antwortbox 1:

Entfällt (eigene Tonaufzeichnungen)

##### Antwortbox 2:

Man liest für die Schwingungsdauer  $T$  ab:  $\frac{3,2\text{cm}}{4,1\text{cm}} \cdot 0,01\text{s} = 0,00780\text{s}$ ,

also beträgt die Frequenz  $f = \frac{1}{T} = 128\text{Hz}$ .

Achtung: Eine „Dreiergruppe“ stellt eine vollständige Periode dar.

##### Antwortbox 3:

Entfällt (eigene Tonaufzeichnungen)

##### Antwortbox 4:

Es handelt sich um den Ton c.

##### Antwortbox 5:

Es handelt sich um den Dur-Dreiklang  $a\text{-cis}^1\text{-e}^1$ .

#### • **Resonanz bei Klaviersaiten**

Antwortbox 1:

Die zum Ton  $a'$  gehörende Saite gerät in Schwingungen. Infolge Resonanz übernimmt sie alle die Schwingungen, die die laut angeschlagene Taste  $a$  anbietet und die auf der Saite  $a'$  möglich sind. Diese Schnittmenge ist nicht leer, da  $a$  und  $a'$  gemeinsame Obertöne haben.

Antwortbox 2:

Die zum Ton  $a$  gehörende Saite gerät in Schwingungen. Infolge Resonanz übernimmt sie alle die Schwingungen, die die laut angeschlagene Taste  $a'$  anbietet und die auf der Saite  $a$  möglich sind. Diese Schnittmenge ist nicht leer, da  $a$  und  $a'$  gemeinsame Obertöne haben.

Antwortbox 3:

Entfällt (siehe Excel-Datei)

Antwortbox 4:

Hier ein um  $90^\circ$  nach links gedrehtes Bildschirmfoto der Lösungszuordnung:

falsch	<input type="checkbox"/>				
richtig	<input type="checkbox"/>				

Antwortbox 5:

Man erkennt in den Diagrammen nur geringfügige Unterschiede, die aber einen entscheidenden Einfluss auf den Höreindruck haben: Die im unteren Diagramm erkennbaren zusätzlichen Frequenzen sehr vieler anderer mitschwingender Saiten vermittelt für das Gehör den etwas halligen Eindruck.

• **Richtungslokalisierung mittels Fourieranalyse**

Antwortbox 1:

Eine Drehung des Smartphones ist wesentlich sinnvoller, da dadurch die Schallausbreitung identisch bleibt. Diese würde sich sofort ändern, wenn die Schallquelle gedreht oder verschoben würde.

Antwortbox 2:

Die Fourierspektren weisen zwar dieselben registrierten Frequenzen auf, diese jedoch mit z. T. sehr unterschiedlichen Amplitudenverhältnissen zueinander.

### Antwortbox 3:

*Das Klavier wird wohl jeder und jede als solches sofort erkennen und den Schalleindruck als denjenigen eines Klaviers bezeichnen, obwohl die Fourierspektren in ihren Amplitudenverhältnissen sehr unterschiedliche sind bzw. sein dürften. Das Gehirn meldet aber aufgrund seiner gelernten Höreindrücke eindeutig das Vorliegen ein- und desselben Instruments.*

### Antwortbox 4:

*An das Trommelfell gelangen aufgrund der „Verzerrung“ durch die individuell geformten Ohrmuscheln Klänge, deren Frequenzspektrum zwar dieselben Frequenzen aufweist, die jedoch bei veränderter Einfallrichtung mit deutlich unterschiedlicher Amplitude ankommen. Daraus kann das Gehirn die Richtung erkennen.*

### Antwortbox 5:

*Bei einem (einzigen) Sinuston können die Ohrmuscheln keine „Verzerrung“ des ankommenden Frequenzgemisches erzeugen. Daher versagt in diesem Fall die Richtungsordnung.*

### Antwortbox 6:

*Die Ohrmuscheln jedes Menschen stimmen selbstverständlich nicht genau mit denen des Kunstkopfes überein. Da jedoch bei der Wiedergabe des vom Kunstkopf aufgenommenen Klangs dessen „Verzerrungen“ im Fourierspektrum direkt an die beiden Trommelfelle des beobachtenden Menschen (dessen Ohrmuscheln müssen umgangen werden, damit nicht eine weitere „Verzerrung“ auftritt), passen diese Spektren nicht genau zu denen, die die Ohrmuscheln des beobachtenden Menschen erzeugen würden.*

## • **Richtungslokalisierung mittels Laufzeit- und Laustärkeunterschieden**

### Antwortbox 1: Frequenz der Schallquelle

*Mittels des roten Schiebers liest man ab: Dauer einer Periode beträgt  $244\mu\text{s}$ . Die Frequenz  $f = \frac{1}{T}$  beträgt daher  $f = \frac{1}{244 \cdot 10^{-6}\text{s}} \approx 4100\text{ Hz}$ .*

### Antwortbox 2: links oder rechts

*Die untere Kurve dient als Triggersignal, da sein Einsatzpunkt stabil bleibt. Da die Amplitude bei Annäherung des linken Ohrs an das Mikrophon größer wird, ist die Kurve dem linken Ohr zuzordnen.*

### Antwortbox 3: Laufzeitdifferenz

*Dreht man den Kunstkopf so weit wie im IBE möglich nach links und nach rechts, erkennt man die Phasenverschiebung um eine volle Periode.*

### Antwortbox 4: Interferenz?

*Offensichtlich werden vom Gehirn beide Hörimpulse getrennt voneinander „ausgewertet“, es findet keine Überlagerung im Sinne einer Interferenz statt.*

### Antwortbox 5: Phasenverschiebung 3°

*Die Zeitdifferenz liest man für eine Drehung um 3° ab zu ca. 24µs. Da eine Periode 244µs dauert, bedeutet dies einen Anteil von ca. 9,8% an der gesamten Periodendauer.*

### Antwortbox 6: Mögliche Fehlwahrnehmung

*Bei Versatz um ein ganzzahliges Vielfaches einer Periode könnte ggf. auf keinen Laufzeitunterschied geschlossen werden und damit die Richtungsortung verfälscht werden.*

## • Residualtöne – (k)eine akustische Täuschung(?)

### Antwortbox 1:

*Die Amplitudenverhältnisse der Obertöne zueinander verändern sich stetig und durchaus unregelmäßig, gleich bleiben hingegen die Frequenzen der Obertöne selbst.*

### Antwortbox 2:

*In der rechten Oktave sind immer Grundton und seine Obertöne vorhanden. Das Ausmessen der Obertöne zeigt deren Frequenzvielfaches des zugehörigen Grundtons.*

### Antwortbox 3:

*Je tiefer der Klang, des mehr verschwindet der Grundton. Beim tiefsten Klang ist sogar der erste Oberton (fast) verschwunden. Zu hören ist also nur noch das Gemisch der Obertöne.*

### Antwortbox 4:

*Das menschliche Gehirn muss gelernt haben, dass zu einem bestimmten Obertongemisch ein ganz bestimmter Grundton gehört, der die Tonhöhe bestimmt – auch wenn dieser Grundton, da er ja physikalisch nicht vorhanden ist, nie zuvor gehört worden ist. Es könnte sich also um eine Transferleistung von höheren zu tieferen Klängen handeln.*

### Antwortbox 5:

Bei Hinzunahme des Grundtons mittels Synthesizers wird man lediglich eine Zunahme der Lautstärke, jedoch keine Klang(farben)veränderung oder Tonhöhenänderung wahrnehmen.

### Antwortbox 6: (Excel-Datei)

Man erkennt ein Periode, die exakt zur Hälfte der tieferen Ausgangsfrequenz passt. Dies könnte zur Folge haben, dass man einen Ton eine Oktave tiefer wahrnimmt.

### Antwortbox 7:

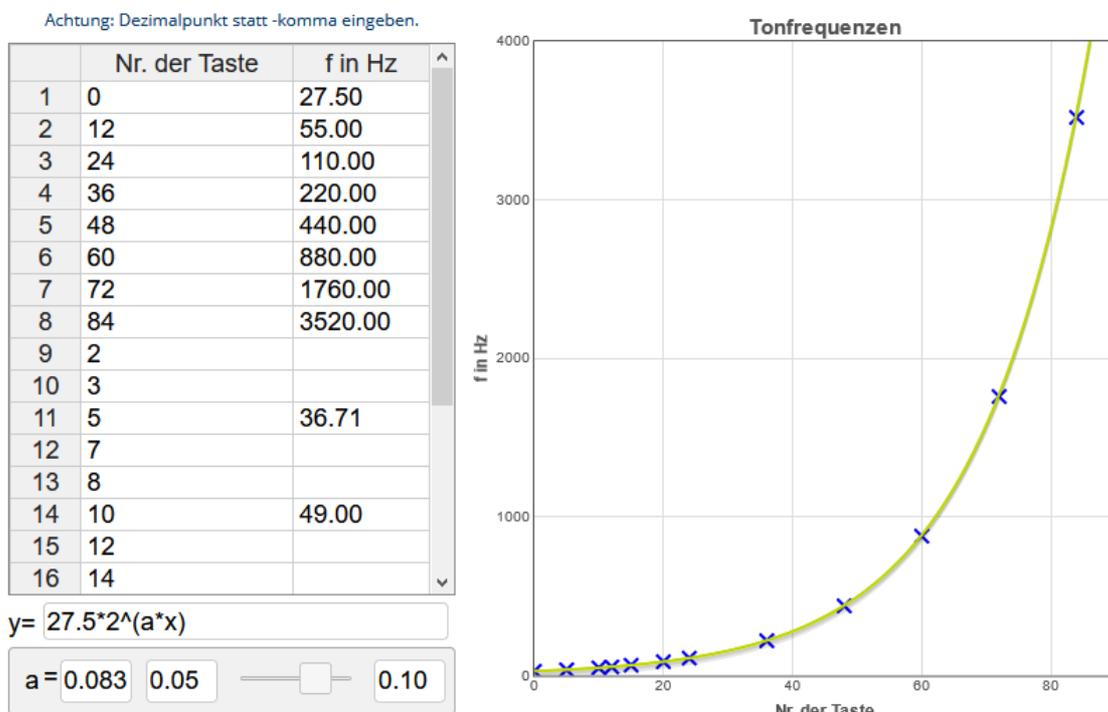
$f_2 = 1,5 \cdot f_1$  ist kein Oberton zu  $f_1$ , da es sich nicht um ein ganzzahliges Vielfaches handelt.

Zur realen Wahrnehmung des 55-Hz-Tons fehlen vermutlich weitere Obertöne, sodass man an dieser Stelle vermutlich lediglich die beiden Ausgangstöne im Intervall einer Quinte wahrnimmt.

## • Zur Berechnung der Tonfrequenzen

### Antwortbox 1:

Bildschirmkopie



0 27.50  
12 55.00  
24 110.00  
36 220.00  
48 440.00  
60 880.00

72 1760.00  
84 3520.00  
2  
3  
5 36.71  
7  
8  
10 49.00  
12  
14  
15 65.41  
17  
19  
20 87.31  
22

Exponent:  $a \approx 0,0835$ , genau  $a = \frac{1}{12} = 0,08\bar{3}$ .

#### Antwortbox 2:

Nach einer Oktave, also nach 12 Halbtönen, muss genau die doppelte Frequenz erreicht werden. Da aufgrund der Hörverhaltens des Menschen das Frequenzverhältnis  $a$  von (höherem) Halbton zu (niedrigerem) Halbton identisch sein muss, damit das Intervall als das gleiche aufgefasst wird, gilt:  $f_{\text{Oktave}} = 2 \cdot f_0 = f_0 \cdot a^{12}$ . Daraus folgt:  $a^{12} = 2$ , bzw.  $a = \sqrt[12]{2}$ . Es ist also  $y = 27,5 \cdot \sqrt[12]{2}^x$ .

Allgemeine Gleichung: unmittelbare Anwendung Exponentialgesetz.

#### Antwortbox 3:

Hier kann man insbesondere die Werte, die im IBE einblendbar sind, nachrechnen.

---

## Übungsaufgaben

---

### • Übungsaufgaben

#### Antwortbox 1: Schwingungsdauer

Erstaunlich: Gleichheit der beiden Frequenzen/Schwingungsdauern, Unabhängigkeit von Federkonstante, Masse....

Alleinige entscheidende Voraussetzung:  $l_{\text{Faden}} = \Delta l_{\text{Feder}}$ .

Verwendete Formeln:  $T_{\text{Faden}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{Faden}}}{g}}$  und  $T_{\text{Feder}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$

Es ist  $D = \frac{F_{G,\text{Pendelkörper}}}{\Delta l_{\text{Feder}}} = \frac{m \cdot g}{\Delta l_{\text{Feder}}}$

Dann ist:  $T_{\text{Feder}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{\Delta l_{\text{Feder}}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l_{\text{Feder}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{Faden}}}{g}} = T_{\text{Faden}}$ .

### Antwortbox 2: Aussage des Experiments / Seillänge

Das Experiment zeigt, dass die Schwingung eines Fadenpendels mit der Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung zur Deckung gebracht werden kann. Dies nutzt man aus, um das sinusförmige Zeit-Weg-Gesetz des harmonischen Oszillators herzuleiten (Fadenpendel mit kleinen Auslenkungen).

Die Seillänge kann man mit Hilfe der messbaren Schwingungsdauer bestimmen gemäß der Formel  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Messung der Schwingungsdauer ergibt  $T = 4,9\text{s}$ , dann ist  $l = g \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = 5,97\text{m}$ .

### Antwortbox 3: Stellungnahme

Verwendete Formel:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Da weder  $s_0$  noch  $m$  darin vorkommen und keine weiteren Größen gegeben sind, kann die zur Bestimmung der Schwingungsdauer notwendige Länge des Seils nicht anderweitig ermittelt werden. Die Frage kann daher nicht beantwortet werden.

### Antwortbox 4: Mehrmaliges Lesen?

Massen- und Amplitudenangabe sind irrelevant für die Bestimmung Schwingungsdauer bzw. der dafür notwendigen Berechnung der Pendellänge. Daher sucht man vergebens nach der Angabe einer relevanten Größe.

### Antwortbox 5: Hemmungspendel

Aus Gründen der Energieerhaltung schwingt das Pendel im rechten – „gehemmten“ – Teil immer genauso hoch wie im linken Teil seiner Bewegung. Lenkt man in einem Realexperiment das Pendel anfangs nach links zu weit aus, könnte es im rechten Teil sogar zu einem Überschlag kommen. Man geht daher bei den nachfolgenden Betrachtungen davon aus, dass das Pendel anfangs hinreichend wenig nach links ausgelenkt sei, sodass es zudem als ein harmonisch schwingendes Pendel angesehen werden kann, dessen Schwingungsdauer dann auch unabhängig von der Schwingungsamplitude ist.

$$T_{ges} = T_{links} + T_{rechts} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} + \pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

$$\text{und } T_{ges} = 75\% \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Damit ergibt sich:

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} + \pi \sqrt{\frac{h}{g}} = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\text{und somit } h = \frac{1}{4} l .$$

